Induzione elettromagnetica: fisica e *flashbacks*

Giuseppe Giuliani
Dipartimento di Fisica 'Volta'
Via Bassi 6, 27100 Pavia

giuliani@fisicavolta.unipv.it
http://matsci.unipv.it/percorsi/

Abstract. A general law for electromagnetic induction phenomena is derived from Lorentz force and Maxwell equation connecting electric field and time variation of magnetic field. The derivation provides with a unified mathematical treatment the statement according to which electromagnetic induction is the product of two independent phenomena: time variation of magnetic field and effects of magnetic field on moving charges. The 'flux rule' has a restricted validity; furthermore, it is neither a causal law nor a 'good' field-law. A survey of Faraday and Maxwell writings shows that the taking root of the 'flux rule' constitutes an open historical problem.

Riassunto. Partendo dall'espressione forza di Lorentz e dall'equazione di Maxwell che lega il campo elettrico alla variazione temporale del campo magnetico si ottiene una legge generale dell'induzione elettromagnetica. Questa legge dà forma matematica all'affermazione secondo cui l'induzione elettromagnetica è il prodotto di due fenomeni indipendenti: la variazione temporale del campo magnetico e gli effetti del campo magnetico su cariche in moto. La 'legge del flusso' ha validità limitata; inoltre, essa non è né una legge causale né una 'buona' legge di campo. Un'analisi dei lavori di Faraday e Maxwell mostra come il radicamento della 'legge del flusso' costituisca un problema storico aperto.

Indice

1 Introduzione

E' noto che la 'legge del flusso' non descrive correttamente i fenomeni di induzione elettromagnetica quando parte del circuito è in moto rispetto alla sorgente del campo magnetico. In questi casi, i manuali introducono, di solito, ipotesi ad hoc implicite per salvaguardare la legge del flusso; un'eccezione è costituita dalle *Lezioni di Feynman* che parlano esplicitamente di 'eccezioni alla legge del flusso'. Gli autori delle *Lezioni* pongono bene in luce l'esistenza di due sorgenti della forza elettromotrice indotta: la variazione temporale del campo magnetico e la componente magnetica della forza di Lorentz.[1]

> Dobbiamo guardare alla 'legge del flusso' in questo modo. In generale, la forza sulla carica unitaria è $\vec{F}/q = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}$. In fili in moto c'è una forza derivante dal secondo termine. Inoltre, c'è un campo se, da qualche parte, c'è un campo magnetico che varia. *Sono due effetti indipendenti*, ma la *fem* lungo un filo chiuso è sempre uguale al tasso di variazione del flusso magnetico attraverso di esso.[2]

Vedremo più avanti che l'affermazione finale non è corretta. Gli stessi autori, peraltro, subito dopo questa affermazione discutono alcuni esempi ai quali 'la legge del flusso non può essere applicata'.[3]

In questo lavoro si mostra che, sviluppando coerentemente quanto affermato nella citazione precedente, si ottiene una legge generale dell'induzione elettromagnetica che contiene, come caso particolare, la 'legge del flusso'.[4]

Si ripercorrono poi alcuni passaggi dei lavori di Faraday, Maxwell ed Einstein, ponendo in evidenza come il radicamento della 'legge del flusso' costituisca un problema storico aperto.

[1] R.P. Feynman, R.B. Leighton, M.L. Sands, *Lectures on Physics*, vol. II, Addison-Wesley (1989), 17-1,17,3.

[2] Ibidem. p. 17 - 2; corsivo mio.

[3] Ibidem.

[4] Questi temi sono già stati trattati in altri lavori consultabili in rete alla pagina: http://matsci/unipv.it/percorsi/emi.htm

2 La legge generale dell'induzione

Quando una concezione si diffonde all'interno di un collettivo di pensiero e lo permea abbastanza fortemente, fino a penetrare nella vita quotidiana e nelle locuzioni linguistiche, quando diventa un modo di vedere nel senso letterale del termine, una contraddizione sembra impensabile e inimmaginabile.

Ludvik Fleck

Genesi e sviluppo di un fatto scientifico, Bologna, Il Mulino, 1983, p. 85.

Si consideri l'espressione della forza di Lorentz:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

Il lavoro compiuto da questa forza su una carica unitaria positiva che percorra una linea chiusa è dato da:

$$\mathcal{E} = \oint_l (\vec{E} + \vec{v}_{carica} \times \vec{B}) \cdot \vec{dl} = \oint_l \vec{E} \cdot \vec{dl} + \oint_l (\vec{v}_{carica} \times \vec{B}) \cdot \vec{dl} \qquad (1)$$

dove, per ragioni che diverranno chiare in seguito, si è posto in evidenza che la velocità che compare nella (1) è quella della carica. Nell'ambito della teoria di Maxwell - Lorentz, questo integrale si presenta come la *naturale* definizione di *forza elettromotrice*: $fem = \mathcal{E}$. Nel vuoto, il secondo termine che compare al terzo membro della (1) è nullo perché $\vec{dl} = \vec{v}_{carica} dt$. Più avanti si vedrà come questo termine possa essere diverso da zero in un conduttore.

Ricordando che:

$$\vec{E} = -grad\,\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \qquad (2)$$

la (1) diventa:

$$\mathcal{E} = -\oint_l \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot \vec{dl} + \oint_l (\vec{v}_{carica} \times \vec{B}) \cdot \vec{dl} \qquad (3)$$

perché:

$$\oint_l grad\,\varphi \cdot \vec{dl} = 0$$

La (3) è la legge generale dell'induzione elettromagnetica. Essa mostra che:

- la fem indotta può essere espressa come la circuitazione del *campo elettrico indotto*, $\vec{E}_i$:

$$\vec{E}_i = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - grad\,\varphi + \vec{v}_{carica} \times \vec{B} \tag{4}$$

- la fem indotta è data dalla somma di due termini: il primo derivante dalla variazione temporale del potenziale vettore (e del campo magnetico); il secondo derivante dalla componente magnetica della forza di Lorentz.

Quando il campo magnetico non dipende dal tempo, la fem indotta si riduce a:

$$\mathcal{E} = \oint_l (\vec{v}_{carica} \times \vec{B}) \cdot \vec{dl} \tag{5}$$

perché:

$$\begin{aligned} \oint_l \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot \vec{dl} &= \int_S rot\,\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot \hat{n}\, dS = \int_S \frac{\partial\, rot\, \vec{A}}{\partial t} \cdot \hat{n}\, dS = \\ &= \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \hat{n}\, dS = 0 \end{aligned}$$

Ritornando all'equazione generale dell'induzione (3), si osservi che:

$$\vec{v}_{carica} = \vec{v}_{linea} + \vec{v}_d$$

dove $\vec{v}_{linea}$ è la velocità dell'elemento di circuito che contiene la carica e $\vec{v}_d$ è la velocità di deriva della carica.[5] Nel caso di fili, $\vec{v}_d$ è parallela

[5]Essendo $v_{linea} \ll c$ e $v_{carica} \ll c$, possiamo usare la legge di composizione delle velocità di Galileo.

all'elemento di linea $\vec{dl}$; ne segue che la legge generale dell'induzione assume la forma:

$$\mathcal{E} = -\oint_l \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot \vec{dl} + \oint_l (\vec{v}_{linea} \times \vec{B}) \cdot \vec{dl} \tag{6}$$

L'equazione generale dell'induzione può anche essere scritta in un'altra forma. Ripartendo dalla (1), si inizia con il calcolo dell'integrale $\oint_l \vec{E} \cdot \vec{dl}$ (figura 1):

$$\oint_l \vec{E} \cdot \vec{dl} = \int_S rot\, \vec{E} \cdot \hat{n}\, dS = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \hat{n}\, dS \tag{7}$$

dove è stata utilizzata l'equazione di Maxwell relativa al rotore del campo elettrico. Se la superficie S non varia in funzione di t – se cioè la linea l

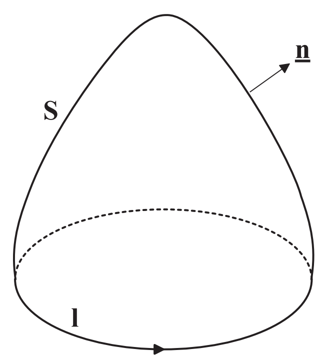

Figura 1: per la derivazione della legge dell'induzione elettromagnetica in funzione del campo magnetico $\vec{B}$.

non varia in funzione di t – si ottiene:

$$\oint_l \vec{E} \cdot \vec{dl} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot \hat{n}\, dS = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} \tag{8}$$

Quando la linea l varia in funzione del tempo, il passaggio dalla (7) alla

(8) non può essere compiuto; in questo caso si ha:[6]

$$\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \hat{n}\, dS = \frac{d}{dt}\int_S \vec{B} \cdot \hat{n}\, dS + \oint_l (\vec{v}_{linea} \times \vec{B}) \cdot \vec{dl} \tag{9}$$

dove $\vec{v}_{linea}$ è la velocità dell'elemento di linea $\vec{dl}$. Pertanto, nel caso generale, la (8) deve essere sostituita dalla:

$$\oint_l \vec{E} \cdot \vec{dl} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B} \cdot \hat{n}\, dS - \oint_l (\vec{v}_{linea} \times \vec{B}) \cdot \vec{dl}$$

In conclusione:

$$\mathcal{E} = \left[-\frac{d}{dt}\int_S \vec{B} \cdot \hat{n}\, dS - \oint_l (\vec{v}_{linea} \times \vec{B}) \cdot \vec{dl}\right] + \oint_l (\vec{v}_{carica} \times \vec{B}) \cdot \vec{dl} \tag{10}$$

Questa equazione è equivalente alla (3), che trascriviamo qui per comodità:

$$\mathcal{E} = -\oint_l \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot \vec{dl} + \oint_l (\vec{v}_{carica} \times \vec{B}) \cdot \vec{dl} \tag{11}$$

I due termini della (10), posti tra parentesi quadra per sottolinearne la comune origine matematica e fisica, sono equivalenti al primo termine della (11): la loro somma è nulla quando $\partial \vec{B}/\partial t = 0$; l'ultimo termine di entrambe le equazioni deriva dalla componente magnetica della forza di Lorentz.

2.1 $\vec{A}$ o $\vec{B}$?

Si riprendano in considerazione le equazioni (11) e (10). Esse sono, dal punto di vista predittivo, equivalenti. Va tuttavia sottolineato come sia preferibile l'equazione espressa in termini del potenziale vettore. Essa infatti esprime la forza elettromotrice indotta come integrale di linea del campo elettromotore indotto

$$\vec{E}_i = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - grad\varphi + \vec{v}_{carica} \times \vec{B}$$

[6]Si veda, per esempio: R. Becker, *Teoria della elettricità*, vol. I, Sansoni, 1949, pp. 44 - 46.

dove il campo elettromotore è un campo 'vero' nel senso che il suo valore in un punto generico P dipende solo da grandezze definite in quel punto: il potenziale vettore, la velocità della carica ed il campo magnetico. Nell'equazione (10) invece, il campo magnetico - nel primo integrale - si comporta come un campo 'anomalo', in quanto connette 'ciò che accade' sulla superficie S - peraltro arbitraria purché la linea l sia il suo contorno - a 'ciò che accade' sulla linea l: il campo magnetico 'agisce' quindi 'a distanza' e con velocità di propagazione infinita, violando così una caratteristica essenziale del concetto di campo.

La questione può essere considerata anche dal seguente punto di vista: l'equazione (11), contenente il potenziale vettore, fornisce una descrizione *causale*: il campo elettromotore produce la fem che, a sua volta, produce la corrente. L'equazione (10) invece, non permette una descrizione causale per due motivi: a) gli eventi che dovrebbero costituire la causa della fem - cioè i valori di $\vec{B}$ sulla superficie S non sono univocamente definiti, perché non è univocamente definita la superficie S; b) il campo $\vec{B}$ dovrebbe agire 'a distanza' con velocità di propagazione infinita.

3 Studio di casi particolari

Nella discussione di alcuni casi particolari, sceglieremo il sistema di riferimento *inerziale* più opportuno per descrivere i fenomeni.[7]

3.1 Barra metallica in moto in un campo magnetico

Si consideri la figura 2. Sul telaio T scorre, con velocità costante $\vec{v}$ e mantenendo il contatto con il telaio, la barra A di lunghezza a. Telaio e barra - costituiti dello stesso materiale metallico e aventi la stessa sezione - sono immersi in un campo magnetico $\vec{B}$ uniforme e costante, perpendicolare al piano della figura ed entrante. Secondo la (11), la forza elettromotrice nel circuito C costituito dalla barra e dalla parte del telaio

[7] In uno dei lavori ('On electromagnetic induction') consultabili in rete citati nella nota 4, sono discussi, oltre a quelli qui presentati, altri casi particolari.

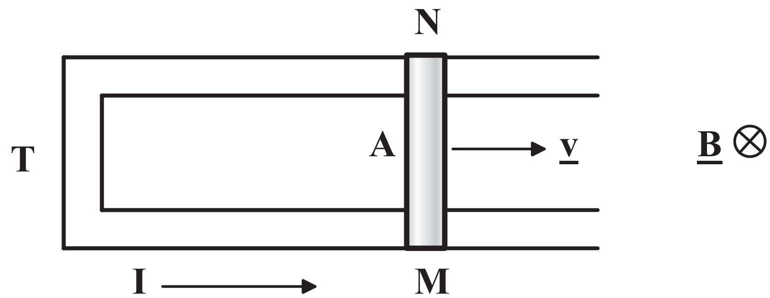

Figura 2: la barra A si muove con velocità costante $\vec{v}$ nel campo magnetico uniforme $\vec{B}$ perpendicolare al piano del foglio ed entrante.

alla sinistra di esso – calcolata in senso antiorario – è data da:

$$\mathcal{E} = \oint_l (\vec{v}_{carica} \times \vec{B}) \cdot \vec{dl}$$

perché il primo termine della (11) è nullo, essendo $\vec{A}$ costante. La velocità della carica è data da:

$$\vec{v}_{carica} = \vec{v}_{linea} + \vec{v}_d$$

dove $\vec{v}_d$ è la velocità di deriva della carica.[8] Si ha pertanto:

$$\mathcal{E} = \oint_l (\vec{v}_{linea} \times \vec{B}) \cdot \vec{dl} + \oint_l (\vec{v}_d \times \vec{B}) \cdot \vec{dl} = vBa$$

dove v è la velocità della barra; il secondo integrale è nullo perché la velocità di deriva è diretta come $\vec{dl}$ (per effetto Hall; si veda più avanti). Questa forza elettromotrice è localizzata nella barra, perché dovuta alla velocità delle cariche contenute in essa.[9] In ogni punto della barra esiste

[8] Abbiamo di nuovo applicato la composizione galileiana delle velocità.

[9] La questione della localizzazione della forza elettromotrice è stata lungamente discussa. Si è anche negato che la questione abbia senso alcuno. Essa ha invece un preciso significato operativo: il tratto del circuito in cui è localizzata la forza elettromotrice è quello in cui la corrente entra dal punto a potenziale inferiore ed esce dal punto a potenziale superiore. Nel caso in discussione, questo tratto è costituito dalla barra in moto; in un qualunque tratto del telaio, la corrente entra dal punto a potenziale superiore ed esce dal punto a potenziale inferiore.

quindi un campo elettrico *indotto* $E_i = vB$ diretto da M verso N. Nel circuito circola una corrente:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{vBaS}{\rho l}$$

dove l è la lunghezza dell'intero circuito, S la sua sezione e ρ la resistività del materiale. Il modulo del vettore densità di corrente sarà allora dato da:

$$J = \frac{vBa}{\rho l}$$

Il campo elettrico effettivo - avente lo stesso valore in ogni punto del circuito - è dato da:

$$E_e = vB\frac{a}{l}$$

Questo è l'unico campo elettrico presente nella parte di telaio a sinistra della barra. Nella barra esso è il risultante del campo elettrico indotto $E_i = vB$ e di un campo elettrico E^* ad esso opposto il cui modulo è tale che:

$$E_e = E_i - E^*$$

Per comprendere quale sia l'origine del campo E^*, si consideri la barra in moto, ma *staccata* dal telaio. Il campo elettrico indotto tende a spostare gli elettroni verso la base della barra (verso il punto M). Tuttavia, appena tale processo inizia, la parte inferiore della barra M si carica negativamente e la parte superiore N positivamente. Si genera quindi tra N ed M un campo elettrico E^* diretto da N a M (verso il basso) che contrasta l'azione del campo indotto. Si raggiunge così una situazione stazionaria caratterizzata dal fatto che la superficie N della barra è carica positivamente e quella M negativamente: all'interno della barra il campo elettrico è nullo perché il campo E^* bilancia esattamente il campo indotto E_i. Se ora la barra viene posta in contatto con il telaio mentre continua a muoversi con velocità uniforme, si stabilisce, dopo un fenomeno transiente, una nuova condizione stazionaria: nel circuito scorre una corrente costante ed il campo elettrico E^* è diminuito perché, grazie al moto degli elettroni, la carica statica in N e M è diminuita.

Si ha pertanto:

$$E^* = vB\left(1 - \frac{a}{l}\right)$$

Quindi il campo elettrico E_c così definito:

$$E_c = \begin{cases} E_e & \text{nel telaio} \\ E^* & \text{nella barra} \end{cases}$$

è un campo elettrico conservativo perché la sua circuitazione lungo tutto il circuito è nulla (tabella 1).

Campo elettrico	**Simbolo**	**Modulo**	**Direzione**
Indotto	E_i	vB	$\uparrow$
Effettivo	E_e	vBa/l	$\uparrow$
	E^*	$vB(1 - a/l)$	$\downarrow$
Conservativo	$E_c = E^*$	$vB(1 - a/l)$	$\downarrow$

Tabella 1: campi elettrici all'interno della barra in moto.

La *differenza di potenziale* $V_N - V_M$, tra i due punti N e M, è, per definizione, il lavoro compiuto dal campo elettrico *conservativo* sulla carica unitaria positiva, quando essa si sposta dal punto N al punto M lungo il telaio o la barra. Nel nostro caso abbiamo (si veda la figura 2):

$$V_N - V_M = E_e(l - a) = vBa\left(1 - \frac{a}{l}\right)$$

se calcolata lungo il telaio, e:

$$V_N - V_M = E^* a = vBa\left(1 - \frac{a}{l}\right)$$

se calcolata lungo la barra. Quindi:

$$V_N - V_M = \mathcal{E}\left(1 - \frac{a}{l}\right) = \mathcal{E} - \frac{a}{l}IR = \mathcal{E} - Ir$$

dove si è indicato con r la resistenza della barra. Si osservi inoltre che vale la relazione:

$$V_N - V_M = IR_T$$

dove R_T è la resistenza del telaio. Si noti che la barra in moto nel campo magnetico *non si comporta come un conduttore ohmico*. Infatti, la differenza di potenziale tra i suoi estremi vale $\mathcal{E} - Ir$ mentre il prodotto della corrente che l'attraversa per la sua resistenza vale Ir.

Il caso discusso richiede ulteriori riflessioni. Siccome nella barra circola una corrente diretta dal punto M al punto N, la velocità delle cariche positive contenute nella barra (cui convenzionalmente si attribuisce il flusso di corrente) ha due componenti: la componente v della barra e la componente v_d diretta da M verso N. La forza di Lorentz dovuta al campo magnetico e agente sulle cariche positive della barra ha quindi una componente qvB diretta da M verso N e una componente qv_dB diretta in senso opposto al moto della barra. Quest'ultima componente, tuttavia, viene esattamente bilanciata, in condizioni stazionarie, dal campo elettrico di Hall che si stabilisce tra le due pareti della barra perpendicolari al suo moto. Quindi, in condizioni stazionarie, l'unica componente effettiva della forza di Lorentz derivante dal campo magnetico è quella diretta da M verso N il cui modulo è qvB. E' questa la ragione per cui nella espressione della forza elettromotrice del circuito compare solo la velocità v della barra.

Il lavoro compiuto dalla forza elettromotrice del circuito nell'unità di tempo è dato da:

$$W(\mathcal{E}) = \mathcal{E} I = \frac{\mathcal{E}^2}{R}$$

Questo lavoro viene dissipato sotto forma di calore, perché le condizioni del circuito sono stazionarie; l'energia viene fornita dalla forza necessaria per mantenere la barra in moto rettilineo uniforme. Questa forza è uguale e contraria a quella che il campo magnetico esercita sulla barra in quanto percorsa dalla corrente I; il suo modulo è dato da:

$$F = IBa = \frac{vBa}{R} \cdot Ba$$

e la potenza necessaria per mantenere la barra in moto da:

$$W(F) = F \cdot v = \frac{\mathcal{E}^2}{R}$$

Questa potenza coincide con la potenza $W(\mathcal{E})$ dissipata nel circuito.

Le considerazioni di bilancio energetico svolte mostrano che il dispositivo studiato converte l'energia meccanica necessaria per mantenere la barra in moto in energia elettrica; questa, a sua volta, viene convertita per effetto Joule in calore. Il campo magnetico svolge, in questo processo, un ruolo di intermediario permettendo la trasformazione dell'energia meccanica in energia elettrica.

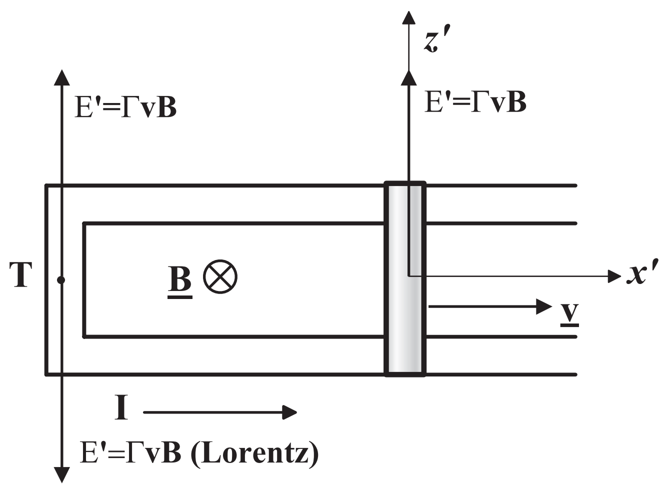

Figura 3: descrizione del fenomeno secondo il sistema di riferimento K' solidale con la barra. Le grandezze accentate si riferiscono a K'; quelle non accentate al sistema di riferimento del laboratorio.

Per concludere l'argomento, è interessante vedere come un osservatore K', solidale con la barra, descrive i fenomeni osservati: in ogni punto della barra - per la terza equazione delle (22) - c'è un campo elettrico dato da $E' = \Gamma vB$ (dove B è il campo magnetico misurato nel sistema di riferimento del laboratorio e $\Gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ è il solito fattore relativistico) diretto lungo il verso positivo dell'asse z' (figura 3). Nell'approssimazione $v \ll c$, risulta $E' \approx vB$; inoltre tutte le altre grandezze fisiche in gioco hanno (approssimativamente) lo stesso valore nei due sistemi di riferimento. Ne segue che i due sistemi di riferimento predicono gli stessi risultati per quanto concerne la misura delle grandezze fisiche coinvolte. In particolare i due osservatori concordano che la sede della fem indotta è la barra. Si noti che si potrebbe erroneamente pensare che K' attribuisca una fem al braccio di telaio parallelo alla barra. Così non è. Infatti: in ogni punto del telaio, che è visto da K' scorrere con velocità $-\vec{v}$, si sommano, elidendosi, due campi: quello derivante dalla terza equazione delle (22), pari a ΓBv, e quello derivante dalla componente magnetica della forza di Lorentz, pari a ΓBv e diretto in senso opposto.

3.2 Il disco di Faraday

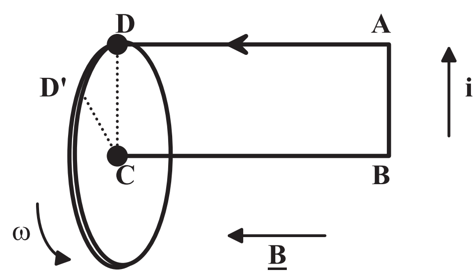

Figura 4: disco di Faraday. Un disco metallico ruota intorno al proprio asse con velocità angolare costante ω in un campo magnetico $\vec{B}$ uniforme, perpendicolare al piano del disco; la freccia sul telaio indica il senso di percorrenza della linea chiusa scelto per il calcolo della forza elettromotrice.

Nella figura 4 è rappresentato il caso ideale del 'disco di Faraday': un disco metallico, di raggio R, ruota con velocità angolare ω costante intorno al suo asse nel senso indicato in figura; il disco è immerso in un campo magnetico costante ed uniforme $\vec{B}$, perpendicolare al piano del disco; gli estremi C e D del telaio sono in contatto con il centro del disco e con un punto della sua circonferenza.

Nel sistema di riferimento del laboratorio, si considera la linea chiusa e *in quiete* costituita dal telaio e dal raggio 'fisso' CD del disco e si analizzano i contributi dei termini che appaiono nel secondo membro della (11). Il primo termine è nullo (perché $\vec{A}$ non dipende dal tempo), mentre il secondo termine fornisce un contributo alla forza elettromotrice – calcolata nel senso indicato in figura – dato da:

$$\mathcal{E} = \int_0^R \omega r B dr = \frac{1}{2}\omega B R^2 \tag{12}$$

dove si è trascurato il contributo della velocità di deriva. Nel circuito $ABCD$ circola quindi una corrente diretta nello stesso senso lungo il quale è stata calcolata la forza elettromotrice.

Gli esperimenti effettuati da Faraday con il disco sono stati di vario tipo: i loro risultati sono riassunti nella tabella 2. Quindi: il circuito

Cosa si muove?	**Moto relativo disco - magnete**	**Moto relativo disco - laboratorio**	**Corrente indotta**
Disco	Sì	Sì	Sì
Magnete	Sì	No	No
Disco e magnete	No	Sì	Sì

Tabella 2: esperimenti di Faraday con il disco.

è percorso da corrente se ruota il disco o il magnete insieme al disco; viceversa, non viene indotta alcuna corrente se ruota solo il magnete. Questi risultati sono descritti dalla legge generale dell'induzione.

E' interessante vedere come Faraday ha spiegato i suoi esperimenti. Faraday riteneva che il magnete creasse "*linee di forza magnetica*" reali e che queste rimanessero ferme quando il magnete ruota: la corrente viene indotta solo quando c'è moto relativo tra disco e linee di forza. Si noti come il sistema di riferimento inerziale del laboratorio rispetto al quale la legge generale dell'induzione descrive gli esperimenti di Faraday sia solidale con le linee di forza ipotizzate da Faraday.

Si consideri infine la disposizione sperimentale mostrata in figura 5. Essa può essere considerata una variante del disco di Faraday in cui disco conduttore e magnete coincidono. La descrizione teorica è la stessa di quella del disco di Faraday.

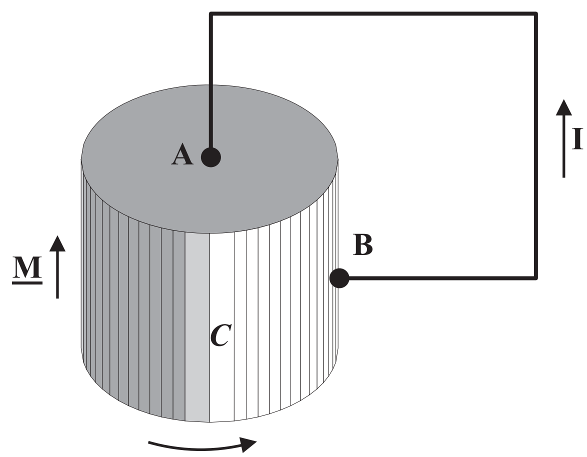

Figura 5: C è un cilindro costituito da un magnete conduttore con la magnetizzazione M diretta nel senso indicato in figura. C ruota nel senso indicato. AB è un circuito conduttore con due contatti striscianti sul cilindro. Il circuito è percorso dalla corrente I.

3.3 Il disco di Corbino

Nel 1911 Corbino studiò il caso di un disco metallico con un foro circolare al suo centro. La circonferenza interna ed esterna del disco, di raggio r_1 e r_2 rispettivamente, sono in contatto con elettrodi circolari di alta conducibilità che rendono tali circonferenze, con buona approssimazione, equipotenziali. Se una differenza di potenziale è applicata tra la circonferenza interna e quella esterna del disco (in quiete), questo è percorso da una corrente radiale. Se il disco viene ora immerso in un campo magnetico costante, uniforme e perpendicolare al piano del disco, il disco viene percorso anche da una corrente circolare.

La resistenza radiale e circolare del disco si calcolano nel modo seguente. Si considera una corona circolare di raggio r e ampiezza dr. La resistenza radiale di questa corona è data da:

$$dR_{radiale} = \rho \frac{dr}{2\pi r s}$$

dove ρ è la resistività e s lo spessore del disco; e la sua ammettenza circolare da:

$$dY_{circolare} = \frac{1}{\rho}\frac{sdr}{2\pi r}$$

Pertanto la resistenza radiale e circolare del disco sono date da:

$$\begin{aligned} R_{radiale} &= \frac{\rho}{2\pi s}\ln\frac{r_2}{r_1} \\ R_{circolare} &= \frac{\rho^2}{s^2}\frac{1}{R_{radiale}} \end{aligned}$$

Indicata con $I_{radiale}$ la corrente radiale, la densità radiale di corrente $J(r)$ sarà:

$$J(r) = \frac{I_{radiale}}{2\pi rs}$$

e la velocità di deriva radiale:

$$v(r)_d = \frac{I_{radiale}}{2\pi rsne}$$

dove n è la concentrazione degli elettroni ed e la loro carica in valore assoluto.

Applicando l'equazione (5) si ottiene che la fem indotta lungo una circonferenza di raggio r è data da:

$$\mathcal{E}_{circolare} = \oint_0^{2\pi r}(\vec{v}(r)_d \times \vec{B}) \cdot \vec{dr} = \frac{I_{radiale}\,B}{sne}$$

La corrente circolare $dI(r)_{circolare}$ che scorre in una corona di raggio r e sezione $s \cdot dr$ sarà:

$$dI_{circolare} = \frac{\mathcal{E}_{circolare}\,sdr}{\rho\,2\pi r} = \frac{\mu B}{2\pi}I_{radiale}\frac{dr}{r}$$

e la corrente circolare totale:

$$I_{circolare} = \frac{\mu B}{2\pi}I_{radiale}\ln\frac{r_2}{r_1}$$

dove $\mu = 1/\rho\, n\, e$ è la mobilità degli elettroni. La potenza dissipata nel disco è:

$$W = (I^2 R)_{radiale} + (I^2 R)_{circolare} = I^2_{radiale} R_{radiale} (1 + \mu^2 B^2)$$

Questa equazione mostra che il fenomeno può essere descritto in termini di un incremento della resistenza radiale di un fattore uguale a $(1+\mu^2 B^2)$: questo effetto è chiamato *magnetoresistenza*. La fem circolare indotta è distribuita omogeneamente lungo ogni circonferenza: ogni corona circolare di sezione $s \cdot dr$ agisce come una pila che produce corrente sulla propria resistenza; pertanto la differenza di potenziale tra due punti qualsiasi di una circonferenza è nulla. Quindi ogni circonferenza è una linea equipotenziale.

L'applicazione della legge generale della induzione elettromagnetica al disco di Corbino è interessante perché:

- mostra come la velocità di deriva degli elettroni contribuisce alla fem indotta;
- fornisce una teoria macroscopica del disco di Corbino, cioè una teoria che non deve tenere conto di processi microscopici come il moto degli elettroni e i loro urti.

3.4 Il disco di Faraday: II

La discussione del disco di Corbino aiuta a comprendere meglio la fisica del disco di Faraday. Si consideri un disco di Faraday in cui la simmetria circolare è conservata: come mostrato nella sezione precedente, la condizione stazionaria è caratterizzata dal flusso di una corrente radiale e di una corrente circolare. La potenza meccanica necessaria per mantenere il disco in rotazione a velocità angolare costante è uguale al lavoro per unità di tempo compiuto dal campo magnetico sulle correnti radiali (essendo nullo il lavoro sulle correnti circolari). Si avrà pertanto:

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} I_{radiale}\, B\, dr\, \frac{\omega\, r\, dt}{dt} = \int_0^{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} (J_{radiale}\, r\, d\alpha\, s)(B\, dr)(\omega\, r) \\ &= I_{radiale}\, \frac{1}{2}\, \omega\, B\, (r_2^2 - r_1^2) \end{aligned}$$

dove i tre termini della funzione integranda rappresentano, rispettivamente, la corrente radiale, il prodotto del campo magnetico per l'elemento infinitesimo di circuito dr e la velocità ωr di questo elemento di circuito. Il termine

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\,\omega\, B\,(r_2^2 - r_1^2)$$

rappresenta la fem indotta dovuta al solo moto del disco: questa fem è la sorgente delle correnti indotte, radiale e circolare. Pertanto, la fisica del disco di Faraday a simmetria circolare può essere così riassunta:

a) la sorgente delle correnti indotte - radiale e circolare - è la fem indotta dovuta *solo* al moto del disco;

b) il prodotto primario della fem indotta è la corrente radiale;

c) la velocità di deriva della corrente radiale produce a sua volta una fem circolare che dà origine alla corrente circolare.

3.5 Alternatore

Si consideri la disposizione sperimentale della figura 6: la spira piana S ruota in senso antiorario con velocità angolare costante ω intorno al suo asse ab in un campo magnetico costante ed uniforme $\vec{B}$, perpendicolare al piano del foglio ed entrante. Anche in questo caso il primo termine della (11) è nullo e il contributo alla forza elettromotrice – calcolata nel senso indicato nella figura – deriva soltanto dal secondo termine contenente la componente magnetica della forza di Lorentz. Si ha pertanto:

$$\mathcal{E} = BS\omega \sin(\omega t + \varphi_0)$$

dove S è l'area della spira, t la variabile tempo e φ_0 l'angolo che la normale alla spira forma con il campo magnetico all'istante $t = 0$. Nella spira circolerà dunque una corrente $I = \mathcal{E}/R$ (R è la resistenza della spira) variabile sinusoidalmente nel tempo.

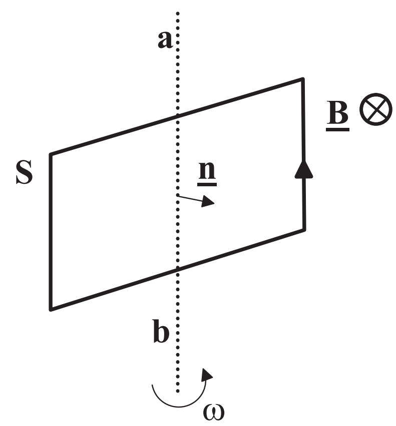

Figura 6: la spira piana S ruota con velocità angolare costante ω nel campo magnetico $\vec{B}$, uniforme, perpendicolare al piano del foglio ed entrante.

4 Teoria ed esperimento

La trattazione svolta mostra perché la 'legge del flusso', pur avendo validità limitata, predica i risultati corretti anche in casi in cui parte del circuito indotto sia in moto. Si veda, in particolare, la discussione del caso della barra in moto o di quello dell'alternatore.

Il caso del disco di Corbino mostra invece come la legge generale dell'induzione ricavata in questo scritto descriva correttamente i fenomeni osservati *senza utilizzare alcun modello microscopico.*[10] Gli esperimenti effettuati con il disco di Corbino debbono quindi essere considerati come una conferma sperimentale della validità della legge generale dell'induzione, in particolare, del contributo alla fem indotta da parte della velocità di deriva degli elettroni.

E' tuttavia possibile pensare nuovi esperimenti che mettano a confronto le predizioni della legge generale dell'induzione e della 'legge del

[10]Ovviamente, secondo la 'legge del flusso', il disco di Corbino non è classificabile come un fenomeno di induzione elettromagnetica.

flusso'. Si tratta di individuare situazioni in cui c'è una variazione di flusso concatenato con il circuito e, al contempo, il contributo dovuto alla componente magnetica della forza di Lorentz è nullo. Si consideri una spira di rame piana rotante in un campo magnetico uniforme e costante. Si è già osservato che, secondo la legge generale dell'induzione (3), la fem è dovuta in questo caso alla componente magnetica della forza di Lorentz e non alla variazione temporale del flusso concatenato con la spira. La condizione desiderata può essere realizzata depositando sulla spira di rame del materiale superconduttore con il risultato che, all'interno della spira di rame il campo magnetico ed il potenziale vettore sono nulli grazie all'azione schermante del superconduttore. Secondo la (3), una rotazione della spira in un campo magnetico uniforme e costante non produce alcuna fem nella spira di rame, nonostante si abbia una variazione del flusso concatenato alla spira; invece, secondo la 'legge del flusso' ci dovrebbe essere, anche in questo caso, una fem indotta. Un altro possibile esperimento: la spira, schermata dal materiale superconduttore, è mantenuta in quiete e viene acceso un campo magnetico con conseguente variazione del flusso concatenato alla spira. Secondo la legge generale dell'induzione - che è una legge *locale* - non viene prodotta alcuna forza elettromotrice, prevista invece dalla 'legge del flusso'.[11]

5 Flashbacks

5.1 Faraday e l'induzione

A partire dal 1851, Faraday iniziò a sviluppare sistematicamente un'idea concepita trent'anni prima, durante le prime ricerche sull'induzione elettromagnetica: le linee di forza magnetica. Con le sue parole:

> Dai miei primi esperimenti sulla relazione tra elettricità e magnetismo (114, nota), ho pensato e parlato di linee di forza magnetica come rappresentazioni del potere magnetico [magnetic power]: non soltanto per quanto riguarda la qualità e la direzione, ma

[11] L'idea di questi possibili esperimenti è essenzialmente dovuta ad Attilio Rigamonti.

> anche la quantità. La necessità di usare più frequentemente questo termine in alcune recenti ricerche (2149, &c), mi ha convinto che è giunto il momento di chiarire ed esaminare attentamente il concetto suggerito dalla frase ... [12]

Faraday distingue tra due concezioni di linee di forza magnetica:

> Sono stato recentemente impegnato nella descrizione e definizione delle linee di forza magnetica (3070), i.e. di quelle linee che sono mostrate, in generale, dalla disposizione della limatura di ferro o di piccoli aghi magnetici intorno o tra magneti; ho mostrato, spero in modo soddisfacente, come queste linee possano essere assunte quali indicatori del potere magnetico, sia per quanto concerne la disposizione che la quantità; inoltre [ho mostrato] come esse possano essere riconosciute da un filo in moto in un modo del tutto differente, in linea di principio, dalle indicazioni fornite da un ago magnetico, e, in numerosi casi, con grandi e peculiari vantaggi. La definizione data non fa alcun riferimento alla natura fisica della forza nel luogo in cui agisce, e si applica con la medesima accuratezza qualunque sia questa natura; essendo ciò molto chiaro, sto per abbandonare per un poco la linea di ragionamento rigoroso per sviluppare alcune riflessioni intorno al carattere fisico delle linee di forza, ed al modo in cui si può supporre che esse si prolunghino nello spazio. Siamo obbligati a sviluppare queste riflessioni rispetto a numerosi poteri naturali e, per la verità, quello della gravità è l'unico caso cui tali riflessioni non appaiono pertinenti.[13]

Le linee di forza possono essere solo 'un'entità teorica'usata per descrivere i fenomeni; oppure esse possono avere un'esistenza fisica, cioè possono essere 'entità reali':

> Nelle precedenti considerazioni non mi sono riferito alla concezione che recentemente ho sostenuto con evidenze sperimentali, che le linee di forza, considerate semplicemente come indicatori del potere magnetico (3117), sono curve chiuse che passano in una parte

[12] M. Faraday, *Experimental Researches in Electricity*, vol. III, London, 1855, p. 328, (3070). In tutte le citazioni delle *Ricerche* di Faraday e, successivamente, del *Trattato* di Maxwell, compaiono tra parentesi i numeri dei paragrafi.

[13] Ibidem, p. 407 - 408, (3243).

> del loro corso attraverso il magnete, e nell'altra parte attraverso la spazio introno ad esso. Queste linee sono identiche, per quanto riguarda la loro natura, qualità e quantità sia dentro il magnete sia fuori. Se a queste linee, prima definite (3071), noi aggiungiamo l'idea di esistenza fisica, e poi riprendiamo in considerazione i casi appena ricordati come assunti sotto la nuova concezione, si vede subito che la probabilità di linee di forza esterne e curve, e, pertanto della loro esistenza fisica, è altrettanto grande, ed anche maggiore di prima...[14]

E:

> Avendo applicato il termine 'linee di forza magnetica' ad un'idea astratta, che io penso descriva accuratamente la natura, la condizione, la direzione e la grandezza relativa delle forze magnetiche, senza alcun riferimento ad alcuna condizione fisica della forza, ho applicato ora il termine 'linee di forza magnetica' includendo l'idea ulteriore dello loro esistenza fisica. Il primo insieme di linee si basa direttamente sull'evidenza sperimentale. Il secondo insieme di linee è introdotto essenzialmente per porre la questione della loro esistenza; e sebbene io non avrei sollevato la questione se non l'avessi ritenuta importante, e tale da ricevere alla fine una risposta positiva, continuo a sostenere questa opinione con qualche esitazione, come, peraltro succede per qualunque conclusione io mi sforzi di trarre a proposito di punti concernenti le profondità della scienza, come, per esempio, quello concernente uno, due, o nessun fluido elettrico; oppure la vera natura di un raggio di luce, o la natura dell'attrazione, persino quella della gravitazione, o la natura generale della materia.[15]

In questo passo, Faraday sostiene che la coformità tra teoria ed esperimento può essere stabilita; invece, l'esistenza reale di un'entità teorica usata da una teoria - che è in accordo con l'esperimento - non può essere certa ma solo attendibile.

Secondo Faraday, in una spira conduttrice si desta una corrente solo quando c'è moto relativo tra la spira e le linee di forza magnetica:

[14] Ibidem, p. 417, (3264).
[15] Ibidem, p. 437, (3299).

> Quando si dice che linee di forza attraversano una spira conduttrice (3087), si deve pensare che ciò è prodotto dalla traslazione di un magnete. Una mera rotazione di un magnete intorno al proprio asse non produce alcun effetto induttivo su circuiti esterni ad esso; perché le condizioni descritte sopra (3088) non sono soddisfatte. Il sistema di forze (power) intorno al magnete non deve essere considerato come necessariamente rotante con il magnete, non più di quanto i raggi emessi dal sole siano considerati ruotare con esso. Il magnete può persino, in certi casi (3097), essere considerato in rotazione tra le sue stesse forze, producendo un effetto elettrico pieno, rilevabile con un galvanometro.[16]

Infatti:

> . . . un disco di rame fu incollato sulla cima di un magnete cilindrico e isolato da esso con un foglio di carta; il magnete ed il disco vennero ruotati insieme, e collettori (connessi al galvanometro) vennero posti in contatto con la circonferenza ed il centro del disco di rame. L'ago del galvanometro si mosse come nel caso precedente [in cui era in rotazione solo il disco], e la direzione di moto era la stessa di quella che si sarebbe osservata se solo il [disco di] rame fosse stato posto in rotazione, e il magnete fosse stato tenuto in quiete. Non c'era alcuna apparente differenza nell'entità della deflessione [dell'ago]. Quindi, la rotazione del magnete non produce alcuna differenza nei risultati; perché un magnete rotante o in quiete produce lo stesso effetto sul [disco di] rame in moto.[17]

Nei diari di Faraday è citato anche un esperimento in cui il disco è mantenuto in quiete e il magnete ruota: non c'è corrente indotta.[18,19]

[16]M. Faraday, *Experimental Researches in Electricity*, vol. III, London, 1855, p. 336 - 337, (3090).

[17]M. Faraday, *Experimental Researches in Electricity*, vol. I, London, 1839, p. 63, (218).

[18]L. P. Williams, *Michael Faraday*, Chapman & Hall, (1965), pp. 203 - 204.

[19]Al XXXIX Congresso dell'AIF (Milazzo, 2000), Guido Pegna ha presentato un semplice dispositivo sperimentale con il quale si possono facilmente riprodurre gli esperimenti disco - magnete effettuati da Faraday. Colgo l'occasione per ringraziare Guido Pegna per avermi donato un esemplare del suo dispositivo.

Il moto relativo tra spira indotta e linee di forza magnetica è, secondo Faraday, la causa della corrente indotta anche quando non c'è alcun moto relativo tra spira indotta e sorgente del campo magnetico. Per esempio, nel caso in cui la sorgente del campo magnetico sia una corrente variabile che scorre nel circuito inducente:

> Nei primi esperimenti (10, 13), la spira inducente e quella indotta erano poste a distanza fissa ed una corrente elettrica veniva inviata attraverso la prima. In questi casi, le stesse linee di forza debbono essere considerate in moto (se posso usare questa espressione) attraverso la spira indotta, dall'istante in cui esse iniziano ad essere sviluppate finché la forza magnetica della corrente raggiunge il suo massimo; siccome le linee di forza si espandono dalla spira inducente verso l'esterno, esse sono - rispetto alla spira indotta in quiete - nella stessa relazione in cui si troverebbero se la spira indotta si fosse mossa nella direzione opposta attraverso di esse, cioè verso la spira inducente. Quindi la prima corrente indotta in questi casi era nella direzione opposta a quella della corrente principale (17, 235). Interrompendo il contatto della batteria, si può pensare che le curve magnetiche (che sono mere espressioni per le forze magnetiche) si contraggano e ritornino verso la corrente che svanisce e, pertanto, si muovono attraverso la spira [indotta] nella direzione opposta, causando una corrente indotta opposta alla precedente.[20]

Il lettore avrà notato che in questo passo Faraday considera le linee di forza magnetica solo come *entità teoriche*, non dotate quindi di realtà fisica. Siamo infatti ancora negli anni trenta, mentre le riflessioni sull'esistenza fisica delle linee di forza sono successive di un ventennio.

Considerando nel loro insieme le riflessioni di Faraday sui fenomeni di induzione elettromagnetica, possiamo affermare che la sua descrizione teorica di questi fenomeni possiede le seguenti caratteristiche:

1. è una teoria di campo, nel senso che le interazioni fisiche sono interazioni locali tra conduttori e linee di forza magnetica

[20] M. Faraday, *Experimental Researches in Electricity*, vol. I, London, 1839, (238).

2. la legge fondamentale è: c'è corrente indotta solo quando c'è moto relativo tra il filo conduttore e le linee di forza magnetica

E' possibile esprimere, almeno parzialmente, questa legge fondamentale con una formula? Per rispondere a questa domanda, consideriamo il caso particolare di un conduttore in moto in un campo magnetico uniforme e costante:

> Dai risultati relativi alla rotazione del filo e del magnete (3097, 3106), è inoltre evidente che quando un filo si muove di moto uniforme tra linee uguali (cioè in un campo di uguale forza magnetica), la corrente di elettricità prodotta è proporzionale al tempo; inoltre [è proporzionale] alla velocità del moto. Essi provano inoltre, in generale, che la quantità di elettricità immessa in una corrente è proporzionale al numero delle linee intersecate.[21]

Se ho ben inteso questo passaggio, esso contiene affermazioni incoerenti. In formule: se $i \propto v\Delta t \propto N$, allora $q = i\Delta t \propto v\Delta t^2$. Se invece: $i \propto v$, allora $q = i\Delta t \propto N$. La sequenza corretta è la seconda. Sulla base di questa, consideriamo un filo metallico rigido che si muove con velocità costante in un campo magnetico uniforme (figura 7): il filo è perpendicolare al piano del foglio. Il campo elettrico indotto sarà proporzionale alle linee di forza intersecate in un secondo lungo la direzione perpendicolare alle linee:

$$E_i \propto v \sin\theta$$

dove θ è l'angolo formato dal vettore velocità del filo con le linee di forza. Indicando con B il parametro di proporzionalità:

$$E_i = Bv \sin\theta$$

Sperimentalmente si verifica che:

$$\vec{E}_i = \vec{v} \times \vec{B}$$

[21] M. Faraday, *Experimental Researches in Electricity*, vol. III, London, p. 346, (3114, 3115).

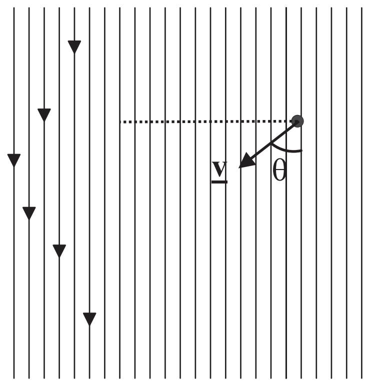

Figura 7: un filo metallico, perpendicolare al piano del foglio, si muove con velocità $\vec{v}$ in un campo magnetico uniforme di cui sono disegnate le linee di forza. La linea tratteggiata orizzontale indica la direzione perpendicolare alle linee di forza e θ è l'angolo tra il vettore velocità e la direzione delle linee di forza.

Si osservi come questa sia l'espressione della componente magnetica della forza di Lorentz sulla carica unitaria positiva. Infine se il filo è inclinato rispetto alla normale uscente dal foglio, si ha:

$$\vec{E}_i = \left[\vec{v} \times \vec{B} \cdot \frac{\vec{a}}{a}\right] \frac{\vec{a}}{a}$$

dove $\vec{a}$ è il vettore associato al filo di modulo uguale alla sua lunghezza, avente la stessa direzione del filo e verso arbitrario.

Queste considerazioni mostrano che il secondo termine della (11) traduce in termini matematici la fisica delle linee di forza di Faraday nel caso di conduttori in moto in un campo magnetico. Naturalmente, questo termine da solo non è in grado di descrivere tutti i fenomeni di induzione elettromagnetica: come indicato dalla (11), è necessario anche un termine dipendente dalla variazione temporale del potenziale vettore (o del campo magnetico).

5.2 Maxwell e l'induzione

Come è ben noto, Maxwell afferma ripetutamente nel suo *Trattato* che esso è la traduzione matematica della fisica di Faraday. Per esempio:

> ... E' stato forse un vantaggio per la scienza il fatto che Faraday, sebbene perfettamente consapevole delle forme fondamentali dello spazio, del tempo e della forza, egli non fosse un matematico di professione. Egli non fu tentato di sviluppare le tante e interessanti ricerche matematiche che le sue ricerche avrebbero suggerito se esse fossero state espresse in forma matematica; e non si sentì impegnato a forzare i suoi risultati in una forma accettabile per il gusto matematico del tempo, o ad esprimerli in una forma che i matematici avrebbero potuto attaccare. Fu così lasciato a svolgere a piacere il proprio lavoro, a coordinare le sue idee con i fatti e ad esprimerli in un linguaggio naturale, non tecnico. Ho intrapreso questo trattato essenzialmente con la speranza di fare di queste idee la base di un metodo matematico.[22]

Tuttavia, per quanto concerne l'induzione elettromagnetica, il *Trattato* di Maxwell non può essere considerato una traduzione matematica della fisica di Faraday. Nella parte introduttiva e descrittiva del *Trattato* dedicata ai fenomeni di induzione, Maxwell scrive:

> L'insieme di questi fenomeni può essere sintetizzata in una legge. Quando varia il numero di linee di induzione magnetica che passano attraverso il circuito secondario nella direzione positiva, una forza elettromotrice agisce nel circuito ed è misurata dal tasso di diminuzione dell'induzione magnetica attraverso il circuito.[23]

E:

> Invece di parlare di numero di linee di forza magnetica, potremmo parlare dell'induzione magnetica attraverso il circuito, cioè dell'integrale di superficie dell'induzione magnetica esteso su qualsiasi superficie confinata dal circuito.[24]

[22]J.C. Maxwell, *A treatise on electricity and magnetism*, third edition, vol. II, Dover Pub. Inc., 1954, p. 176, (528).

[23]Ibidem, p. 179, (531).

[24]Ibidem, pp. 188 - 189, (541).

Espressa matematicamente, questa legge si scrive:

$$fem = -\frac{d\Phi}{dt} \tag{13}$$

dove Φ è il flusso del campo magnetico concatenato con il circuito indotto. La (13) è la 'legge del flusso': Maxwell non la scrive. Non sfuggirà al lettore il fatto che alla legge di campo di Faraday subentra qui una descrizione 'contaminata' dall'azione a distanza (si veda la discussione della sezione 2.1).[25]

Tuttavia, quando Maxwell sviluppa la *teoria dei circuiti elettrici* egli definisce dapprima il *momento elettrocinetico* del circuito secondario (indotto):

$$p_2 = LI_2 + M_{21}I_1 \tag{14}$$

dove gli indici 1 e 2 si riferiscono al circuito primario (inducente) e secondario, rispettivamente; L e M_{21} sono il coefficiente di autoinduzione e quello di induzione mutua; I_1 ed I_2 le rispettive correnti: *i due circuiti sono in relativa quiete*. Si noti come il momento elettrocinetico di Maxwell coincida, nella (14), con il flusso del campo magnetico concatenato con il circuito indotto. Maxwell afferma poi che la fem indotta è data da (si veda l'appendice 1):

$$fem = -\frac{dp_2}{dt} \tag{15}$$

Siccome:

$$p_2 = \oint_l \vec{A} \cdot \vec{dl} \tag{16}$$

dove $\vec{A}$ è il potenziale vettore, ne segue che:

$$fem = -\frac{d}{dt} \oint_l \vec{A} \cdot \vec{dl} \tag{17}$$

Siccome i due circuiti sono in relativa quiete, questa equazione è equivalente, per il teorema di Stokes, alla (13).

[25]Come mostrato in precedenza, la (13) vale solo in casi particolari, quando cioè nessuna parte del circuito indotto è in moto.

Il passaggio più interessante è però costituito dal paragrafo 598 intitolato *Equazioni generali dell'intesità elettromotrice*, in cui Maxwell considera il circuito indotto in moto rispetto al circuito inducente e ricava per il campo elettrico indotto (intensità elettromotrice) l'espressione:

$$\vec{E}_i = \vec{v}_{linea} \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - grad\, \varphi \tag{18}$$

Abbiamo scritto questa equazione usando la simbologia moderna ed in forma vettoriale (Maxwell la scrive in termini delle sue componenti); abbiamo inoltre aggiunto il suffisso *linea* alla velocità.

Maxwell commenta:

> Il termine contenente la nuova grandezza φ è stato introdotto per dare generalità all'espressione di $\vec{E}_i$. Questo termine scompare dall'integrale quando esteso all'intero circuito... L'intensità elettromotrice è stata già definita nell'art. 68. E' anche chiamata l'intensità elettrica risultante, essendo la forza esercitata sull'unità di carica positiva posta in quel punto. Abbiamo ottenuto il valore più generale per questa grandezza nel caso di un corpo in moto in un campo magnetico dovuto a un circuito elettrico variabile. Se il corpo è un conduttore, la forza elettromotrice produrrà una corrente; se è un dielettrico, la forza elettromotrice produrrà solo uno spostamento elettrico. L'intensità elettromotrice, ovvero la forza su una particella, deve essere attentamente distinta dalla forza elettromotrice lungo un arco di una curva, l'ultima grandezza essendo l'integrale di linea della prima. Vedi l'art. 69.[26]

E:

> L'intensità elettromotrice [campo elettrico indotto], dato dall'equazione (18), dipende da tre circostanze. La prima di queste è il moto della particella attraverso il campo magnetico. La parte della forza dipendente da questo moto è espressa dal primo termine al secondo membro dell'equazione. Esso dipende dalla [componente della] velocità della particella perpendicolare alle linee di induzione magnetica. [...] Il secondo termine nell'equazione (18)

[26]Ibidem, pp. 239 - 240, (598)

> dipende dalla variazione temporale del campo magnetico. Questa può essere dovuta o alla variazione temporale della corrente elettrica nel circuito primario, o al moto del circuito primario. [...] L'ultimo termine è dovuto alla variazione della funzione φ nelle differenti parti del campo.[27]

Secondo Maxwell la velocità che compare nella (18) è la 'velocità della particella'. In realtà, i calcoli effettuati da Maxwell mostrano che la velocità in questione è quella dell'elemento di circuito. Questa confusione non deve sorprendere: Maxwell non possedeva un modello di corrente, perché non possedeva un modello di elettricità. Nell'art. 569 Maxwell scrive:

> La corrente elettrica non può essere concepita se non come un fenomeno cinetico. [...] Gli effetti della corrente, come l'elettrolisi, e il trasferimento di elettricità da un corpo ad un altro, sono tutte azioni progressive che richiedono tempo per essere compiute, e sono pertanto della natura dei moti. Per quanto riguarda la velocità della corrente, essa potrebbe essere dell'ordine di un decimo di pollice all'ora o di un centinaio di miglia al secondo [qui Maxwell cita il paragrafo 1648 delle *Experimental Researches* di Faraday]. Siamo così lontani dal conoscere il suo valore assoluto che non sappiamo neppure se ciò che chiamiamo direzione positiva è la vera direzione del moto o la direzione contraria.[28]

Si noti che la (18) coincide con la nostra equazione generale dell'induzione (6) relativa al caso in cui il circuito indotto sia filiforme e, quindi, il contributo della velocità di deriva degli elettroni è nullo. Appare comunque evidente che Maxwell era ben consapevole del fatto che, quando il circuito indotto è in moto, la 'legge del flusso' deve essere sostituita da una legge più generale che la contiene.

5.3 Einstein e l'induzione

Nell'introduzione dell'articolo del 1905 che ha dato origine alla teoria della relatività, Einstein scrive:

[27]Ibidem, pp. 240 - 241 (599).
[28]Ibidem pp. 210 - 211, (569).

> E' noto che l'elettrodinamica di Maxwell - come la si interpreta attualmente - nella sua applicazione ai corpi in movimento porta a delle asimmetrie, che non paiono essere inerenti ai fenomeni. Si pensi per esempio all'interazione elettromagnetica tra un magnete e un conduttore. I fenomeni osservabili in questo caso dipendono soltanto dal moto relativo del conduttore e del magnete, mentre secondo l'interpretazione consueta i due casi, a seconda che l'uno o l'altro di questi corpi sia quello in moto, vanno tenuti rigorosamente distinti. Se infatti il magnete è in moto e il conduttore è a riposo, nei dintorni del magnete esiste un campo elettrico con un certo valore dell'energia, che genera una corrente nei posti dove si trovano parti del conduttore. Ma se il magnete è in quiete e si muove il conduttore, nei dintorni del magnete non esiste alcun campo elettrico, e si ha invece nel conduttore una forza elettromotrice, alla quale non corrisponde nessuna energia, ma che - a parità di moto relativo nei due casi considerati - dà luogo a correnti elettriche della stessa intensità e dello stesso andamento di quelle alle quali dà luogo nel primo caso la forza elettrica.[29]

Nella parte del lavoro dedicata all'elettrodinamica, Einstein osserva infine:

> E' inoltre chiaro che l'asimmetria menzionata nell'Introduzione riguardo alla trattazione della corrente generata mediante il moto relativo di un magnete e di un conduttore sparisce. Anche le questioni relative alla "sede" della forza elettromotrice elettrodinamica (macchine unipolari) sono infondate.[30]

Alla luce della trattazione svolta dei fenomeni di induzione, nonché dei richiami ai lavori di Faraday e Maxwell, si può osservare quanto segue:

1. Correttamente Einstein sottolinea alla fine che, usando le trasformazioni relativistiche dei campi, ogni asimmetria scompare.

2. La questione della 'sede' della forza elettromotrice ha rilevanza sperimentale, come mostrato nella nota 9 a pagina 9.

[29]A. Einstein, 'L'elettrodinamica dei corpi in movimento', trad. it. di S. Antoci, alla pagina Web: http://matsci.unipv.it/persons/antoci/re/einstein05.pdf, p.1.
[30]Ibidem, p. 13.

Mostriamo ora come si tratta il caso del moto relativo *traslazionale* tra circuito e magnete. Consideriamo un circuito filiforme rigido ed un magnete in moto relativo uniforme. Assumiamo, al solito, che i due sistemi di riferimento associati al circuito ed al magnete abbiano gli assi paralleli ed equiversi e che il moto relativo avvenga lungo la direzione dell'asse x comune. Nel sistema di riferimento del magnete, che vede il circuito muoversi con velocità V_{CM} lungo il proprio asse x, la fem indotta è data dall'equazione:

$$\begin{aligned} fem &= \oint_l \vec{E} \cdot \vec{dl} + \oint_l (\vec{V}_{CM} \times \vec{B}) \cdot \vec{dl} = \\ &= -\oint_l \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot \vec{dl} + \oint_l (\vec{V}_{CM} \times \vec{B}) \cdot \vec{dl} \end{aligned}$$

Abbiamo applicato l'equazione generale dell'induzione (6), valida nel caso di circuiti filiformi. Siccome il campo magnetico generato dal magnete non dipende dal tempo, l'equazione precedente assume la forma semplice:

$$fem = \oint_l (\vec{V}_{CM} \times \vec{B}) \cdot \vec{dl}$$

che, essendo $\vec{V}_{CM} \times \vec{B}$ perpendicolare all'asse x, diventa:

$$fem = \oint_l \left[(\vec{V}_{CM} \times \vec{B})_y dy + (\vec{V}_{CM} \times \vec{B})_z dz \right] \tag{19}$$

Poiché la forma delle equazioni deve essere la stessa in ogni sistema di riferimento inerziale, nel sistema di riferimento del circuito, si ha:

$$fem' = \oint_{l'} \vec{E}' \cdot \vec{dl}' + \oint_{l'} (\vec{V}_{CC} \times \vec{B}') \cdot \vec{dl}'$$

dove con $\vec{V}_{CC} = 0$ è stata indicata la velocità del circuito rispetto a se stesso. Quindi:

$$fem' = \oint_{l'} \left(E'_x dx' + E'_y dy' + E'_z dz' \right)$$

Essendo, per le equazione di trasformazione dei campi:

$$\begin{aligned} E'_x &= E'_x = 0 \\ E'_y &= \Gamma(\vec{V}_{CM} \times \vec{B})_y \\ E'_z &= \Gamma(\vec{V}_{CM} \times \vec{B})_z \end{aligned}$$

e, per le trasformazioni di Lorentz:

$$\begin{aligned} dy' &= dy \\ dz' &= dz \end{aligned}$$

si ottiene:

$$fem' = \Gamma \oint_l \left[(\vec{V}_{CM} \times \vec{B})_y dy + (\vec{V}_{CM} \times \vec{B})_z dz \right]$$

che coincide, a parte il fattore Γ, con la (19). Non c'è quindi alcuna asimmetria considerando in moto, alternativamente, il circuito o il magnete. Le asimmetrie di cui parlava Einstein erano dovute a non corrette applicazioni della teoria di Maxwell: in particolare, non venivano usate, perché non ancora note, le equazioni di trasformazione dei campi.

6 Perché la legge del flusso?

Questa seppur breve discussione di alcuni passi di Faraday e Maxwell suggerisce una domanda di fondo: come e perché si è radicata la 'legge del flusso'? Infatti:

1. la fisica delle linee di forza magnetica di Faraday non ha mai ricevuto una trattazione matematica completa (ammesso che tale trattazione sia possibile)

2. la 'legge del flusso' non è una traduzione matematica della fisica delle linee di forza magnetica

3. Nel *Trattato* di Maxwell la 'legge del flusso' è accompagnata da 'un'equazione generale dell'intensità elettromotrice' (18) con una

corrispondente 'equazione generale della fem indotta': la velocità che compare nella (18) è la velocità dell'elemento di circuito e non la velocità delle cariche in esso contenute. Tuttavia, l'equazione (18) coincide con la nostra equazione (4) quando il contributo della velocità di deriva è nullo, come nel caso di circuiti filiformi

4. l'esplicita formulazione della espressione della forza di Lorentz avrebbe dovuto suggerire una revisione dell'intera materia

Credo che sussista uno stimolante problema di ricostruzione storica.

7 Appendice 1

Lo studio, da parte di Maxwell, dell'elettrodinamica si basa su un'analogia meccanica. Il capitolo quinto del secondo volume del *Trattato* è dedicato ad una rassegna della dinamica di Lagrange. Il capitolo si chiude con le seguenti riflessioni:

> Come lo sviluppo delle idee e dei metodi della matematica pura, costruendo una teoria matematica della dinamica, ha reso possibile portare alla luce molte verità che non sarebbero state scoperte senza addestramento matematico, così, se dobbiamo sviluppare teorie dinamiche di altre scienze, dobbiamo avere le nostre menti imbevute di queste verità dinamiche e di metodi matematici.
>
> Nella formazione di idee e termini relativi ad altre scienze, che, come l'elettricità, riguarda forze e loro effetti, dobbiamo costantemente avere presenti le idee appropriate alla fondamentale scienza della dinamica, così da poter, durante il primo sviluppo della scienza, evitare inconsistenze con quanto già stabilito, e, anche quando le nostre concezioni divengano più chiare, il linguaggio che abbiamo adottato possa essere di aiuto e non di ostacolo.[31]

Coerentemente con questa impostazione, Maxwell sviluppa la teoria dei circuiti elettrici, definendo, innanzitutto, l'energia elettrocinetica di un

[31] J.C. Maxwell, *A treatise on electricity and magnetism*, third edition, vol. II, Dover Pub. Inc., 1954, p. 210, (567).

sistema di circuiti elettrici, in analogia con l'energia cinetica di un sistema meccanico:

$$T = \frac{1}{2}L_1\dot{y_1}^2 + \frac{1}{2}L_2\dot{y_2}^2 + \cdots + M_{12}\dot{y_1}^2\dot{y_2}^2 + \cdots \tag{20}$$

dove $\dot{y}_1, \dot{y}_2, \ldots$ sono le correnti. Maxwell osserva:

> Differenziando T rispetto a $\dot{y}_1$, otteniamo la quantità p_1 che, nella teoria dinamica, può essere chiamato il momento corrispondente a $\dot{y}_1$. Nella teoria elettrica chiameremo p_1 il momento elettrocinetico del circuito A_1.[32] Il suo valore è:[33]
>
> $$p_1 = L_1\dot{y}_1 + M_{12}\dot{y}_2 + \cdots \tag{21}$$

Il paragrafo successivo è dedicato alla definizione di forza elettromotrice. Lo riproduciamo integralmente.

> 579.] Sia E la forza elettromotrice impressa nel circuito A, derivante da qualche causa, come una batteria voltaica o termoelettrica, che produca una corrente indipendentemente dall'induzione elettromagnetica.
>
> Sia R la resistenza del circuito; allora, per la legge di Ohm, una forza elettromotrice $R\dot{y}$ è richiesta per superare la resistenza, lasciando una forza elettromotrice $E - R\dot{y}$ disponibile per cambiare il momento del circuito. Chiamando questa forza [elettromotrice] Y', abbiamo, dalle equazioni generali:
>
> $$Y' = \frac{dp}{dt} - \frac{dT}{dy}$$
>
> ma, siccome T non dipende da y, l'ultimo termine scompare.
>
> Quindi, l'equazione della forza elettromotrice è
>
> $$E - R\dot{y} = Y' = \frac{dp}{dt}$$

[32] Maxwell usa due termini simili: il momento elettrocinetico p del circuito e il momento elettrocinetico in un punto del circuito. Quest'ultimo è il potenziale vettore $\vec{A}$; tra i due vale la relazione: $p = \oint_l \vec{A} \cdot \vec{dl}$.

[33] Ibidem p. 224 (578).

o

$$E = R\dot{y} + \frac{dp}{dt}$$

La forza elettromotrice impressa E è pertanto la somma di due parti. La prima, $R\dot{y}$, è richiesta per mantenere la corrente $\dot{y}$ contro la resistenza R. La seconda parte è richiesta per aumentare il momento elettromagnetico p. Questa è la forza elettromotrice che deve essere fornita da sorgenti indipendenti dall'induzione elettromagnetica. La forza elettromotrice derivante solo dall'induzione elettromagnetica è evidentemente $-dp/dt$, cioè *il tasso di diminuzione del momento elettrocinetico del circuito*.[34]

Si noti come il passaggio decisivo costituito dalla affermazione 'la forza elettromotrice derivante solo dall'induzione elettromagnetica è evidentemente $-dp/dt$, cioè *il tasso di diminuzione del momento elettrocinetico del circuito*' non sia affatto evidente: in realtà, Maxwell *assume* che la forza elettromotrice indotta sia data da $-dp/dt$.

8 Appendice 2

Le equazioni di Maxwell sono invarianti – cioè la loro forma non cambia – per trasformazioni di Lorentz. Indichiamo qui la procedura da seguire per trovare le condizioni che assicurano l'invarianza delle equazioni di Maxwell.

1. Si considerano due sistemi di riferimento inerziali, K e K' aventi le seguenti caratteristiche: assi paralleli ed equiversi; K' in moto rettilineo uniforme con velocità V rispetto a K lungo la direzione positiva dell'asse x.

2. Si scrivono le equazioni di Maxwell per il vuoto per il sistema di riferimento K.

3. Si sostituiscono in esse alle coordinate x, y, z, t le corrispondenti coordinate x', y', z', t' usando le trasformazioni di Lorentz. Così

[34] Ibidem, p. 224 - 225 (579).

facendo, si ottengono delle equazioni miste in cui, insieme alle coordinate accentate, compaiono ancora le grandezze fisiche non accentate.

4. A questo punto si impone che le equazioni miste così ottenute abbiano la stessa forma delle equazioni di partenza.

Affinché quest'ultima condizione sia soddisfatta, occorre che:

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x \\ E'_y &= \Gamma[E_y + (\vec{V} \times \vec{B})_y] \\ E'_z &= \Gamma[E_z + (\vec{V} \times \vec{B})_z] \end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned} B'_x &= B_x \\ B'_y &= \Gamma\left[B_y - \frac{1}{c^2}(\vec{V} \times \vec{E})_y\right] \\ B'_z &= \Gamma\left[B_z - \frac{1}{c^2}(\vec{V} \times \vec{E})_z\right] \end{aligned} \tag{23}$$

(dove $\Gamma = 1/\sqrt{1 - V^2/c^2}$) e che ρc e J_x, J_y, J_z costituiscano le componenti di un quadrivettore: la quadricorrente $\vec{\mathcal{J}} = (\rho c, J_x, J_y, J_z)$. Le (22) e le (23) sono, rispettivamente, le equazioni di trasformazione delle componenti dei campi elettrici e magnetici. Le equazioni di trasformazione delle componenti di $\vec{J}$ si ottengono ricordando che costituiscono le componenti spaziali della quadricorrente.

9 Appendice 3

Mostriamo qui come, partendo dalla definizione usuale di forza elettromotrice indotta, si pervenga ad una situazione in cui si è tentati di introdurre *ad hoc* una nuova definizione di forza elettromotrice che salvi la 'legge del flusso'.

Se, invece di definire la fem indotta mediante la (1), si pone, come sovente si fa nei manuali:

$$fem = \oint_l \vec{E} \cdot \vec{dl} \tag{24}$$

si perviene, ripercorrendo i calcoli effettuati alla pagina 6, all'equazione:

$$\oint_l \vec{E} \cdot \vec{dl} = -\frac{d\Phi}{dt} - \oint_l \vec{v}_{linea} \cdot \vec{dl} \tag{25}$$

Si noti come la velocità che compare nell'integrale di linea sia quella dell'elemento di circuito dl: questa velocità entra in gioco perché si suppone che il circuito si muova.[35]

A questo punto, diversi autori introducono una definizione *ad hoc* della forza elettromotrice:[36]

$$fem_{ad\,hoc} = \oint_l (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{dl} \tag{26}$$

In questa definizione si assume implicitamente che la velocità che compare nell'integrale di linea sia la velocità delle cariche che, in generale, è invece data da $\vec{v}_{carica} = \vec{v}_{linea} + \vec{v}_{deriva}$. Con questa nuova definizione della fem si ritiene di poter ristabilire la 'legge del flusso'. Infatti, dalla (25) si conclude che:

$$fem = -\frac{d\Phi}{dt} \tag{27}$$

10 Bibliografia

Segnalo qui *alcuni* lavori apparsi in letteratura sugli argomenti trattati. Per facilitarne la lettura, ho posto in evidenza i punti salienti in cui l'impostazione di questi lavori differisce radicalmente da quella del presente scritto.
Recentemente è apparso in rete un lavoro sperimentale riguardante gli argomenti trattati:
G. A. Kelly, 'Faraday's Final Riddle; Does the Field Rotate with a Magnet?', http://www.iei.ie/papers/faraday/faraday1.html#top
Il lavoro contiene anche un elenco di articoli (1895 - 1963) in cui sono riprodotti gli esperimenti di Faraday. Essendo venuto a conoscenza di questo lavoro solo poco prima della chiusura del presente scritto, non sono in grado di inserirne

[35] Il circuito si può anche deformare in modo che ciascun suo elemento infinitesimo dl abbia la propria velocità $\vec{v}_{linea}$.

[36] Si vedano, per esempio, i lavori citati nella Bibliografia.

una approfondita discussione. Tuttavia, è possibile sin d'ora segnalare come l'ipotesi interpretativa dell'autore - secondo la quale le linee di forza magnetica ruotano insieme al magnete - sia in contraddizione con i suoi stessi dati.

Il problema della applicabibiltà della 'legge del flusso' è trattata, per esempio, da:
J. Scanlon, R.N. Henriksen and J.R. Allen, 'Approaches to electromagnetic induction', *Am. J. Phys.*, 37, (1969), 698 - 708.
In questo lavoro:

- non si distingue tra velocità dell'elemento di circuito e velocità della carica
- si introduce una definizione *ad hoc* per la forza elettromotrice, per salvare la 'legge del flusso' (equazione 26 dell'appendice 3)
- conseguentemente, si debbono scegliere *ad hoc* le linee di integrazione nel caso in cui una parte del circuito indotto sia in moto[37]

F. Bevilacqua, S. Bordoni, 'Un case study: l'induzione elettromagnetica', *La Fisica nella Scuola*, quaderno 5, 1995, 87 - 104.
In questo lavoro:

- non si distingue tra velocità dell'elemento di circuito e velocità della carica
- si seguono gli autori dell'articolo precedente in una definizione *ad hoc* della forza elettromotrice, al fine di salvare la 'legge del flusso'
- non si riconosce che le sorgenti della fem sono due e distinte: la variazione temporale del campo magnetico ed il moto delle cariche nel campo magnetico
- si ignora l'esperimento di Faraday in cui il disco è fermo e ruota il magnete e quello in cui entrambi sono in rotazione; di conseguenza, si sottovalutano i passaggi delle *Ricerche* in cui si afferma che c'è corrente indotta solo quando c'è moto relativo tra conduttore e linee di forza magnetica

[37] Per una discussione dettagliata si veda il lavoro citato nella nota 7.

A. Miller, *Albert Einstein special theory of relativity*, Addison-Wesley, (1981), pp. 145 - 164.
In queste pagine si trova una dettagliata ricostruzione di come l'elettrodinamica era 'comunemente intesa' intorno al 1900.