

Questa rubrica si propone di stimolare la riflessione sul tipo di conoscenza prodotta dalla fisica e di porre in evidenza termini e concetti che costituiscono punti nodali per l'apprendimento della disciplina. L'approccio storico-critico, così come quello didattico, non hanno alcuna pretesa di essere esaustivi.

L'induzione elettromagnetica: un percorso didattico.

1. Introduzione

È consuetudine assai diffusa, nei manuali e nell'insegnamento, descrivere i fenomeni di induzione elettromagnetica sulla base della 'regola del flusso'. È stato tuttavia mostrato che questa regola è, appunto, una regola di calcolo e non una legge fisica: non è una legge di campo; non è una legge causale; è incompatibile con la relatività ristretta; non è in grado di individuare dove è localizzata la forza elettromotrice indotta [1-6].

Nei lavori citati è inoltre mostrato perché, in molti casi, la regola del flusso, pur oscurando l'origine fisica dei fenomeni, sia in grado di predire il valore corretto della forza elettromotrice indotta.

È peraltro possibile pervenire ad una legge generale dell'induzione elettromagnetica definendo la forza elettromotrice indotta (*fem*) come l'integrale di linea della forza di Lorentz sulla carica unitaria positiva:

$$(1) \quad \mathcal{E} = \oint_l (\vec{E} + \vec{v}_c \times \vec{B}) \cdot d\vec{l},$$

dove \vec{v}_c è la velocità della carica [1-6]. Se si usa la relazione

$$(2) \quad \vec{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

(φ potenziale scalare, \vec{A} potenziale vettore) si ottiene immediatamente la legge generale dell'induzione elettromagnetica

$$(3) \quad \mathcal{E} = - \oint_l \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{l} + \oint_l (\vec{v}_c \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}.$$

Siccome $\vec{v}_c = \vec{v}_l + \vec{v}_d$ (possiamo usare la regola di composizione delle velocità di Galileo

perché la velocità dell'elemento di circuito che contiene la carica $v_l \ll c$ e la velocità di deriva della carica $v_d \ll c$, l'equazione precedente assume la forma

$$(4) \quad \mathcal{E} = - \oint_l \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{l} + \oint_l (\vec{v}_l \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} + \oint_l (\vec{v}_d \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}.$$

Si osservi che nel caso dei circuiti filiformi l'integrale contenente la velocità di deriva si annulla perché \vec{v}_d è diretta come $d\vec{l}$. La legge generale (3) racchiude in sé, in modo trasparente, le due origini distinte della forza elettromotrice indotta: il moto delle cariche in un campo magnetico e la variazione temporale del campo magnetico (del potenziale vettore). La applicazione della (3) a diversi casi significativi, sono discussi in [1-4]; in questi lavori (ad eccezione dell'ultimo) sono svolte anche riflessioni di carattere storico (Faraday, Maxwell, Einstein); all'induzione elettromagnetica è stata dedicata una sintetica voce di questo Glossario [5] ⁽¹⁾.

2. Un possibile percorso didattico

Un possibile percorso didattico che si propone di porre in luce le due origini distinte della forza elettromotrice indotta (e di pervenire alla legge generale dell'induzione), parte da semplici esperimenti condotti con un magnete e una spira in moto relativo. Appare subito evidente come questo percorso si riallacci al problema posto da Einstein nell'introduzione all'articolo del 1905 sulla relatività ristretta (sezione 2.5). Questo percorso è stato più volte seguito con gli studenti del secondo anno del corso di laurea triennale in Matematica dell'Università di Pavia come introduzione allo studio dei fenomeni dell'induzione elettromagnetica. Si ritiene che esso possa essere adattato per studenti della scuola secondaria superiore e proposto all'interno dei corsi di formazione degli insegnanti.

2.1. Gli strumenti

Gli studenti hanno a disposizione un magnete costituito da due espansioni (la cui distanza è regolabile), da una serie di avvolgimenti, di forma quadrata o rettangolare (con lati di lunghezza diversa), costituiti da un numero variabile di spire e da un galvanometro a zero centrale (fig. 1) ⁽²⁾. Gli studenti, divisi in gruppi, sono invitati a sperimentare senza che sia loro dato alcun suggerimento circa il tipo di esperimenti da condurre e senza alcuna precedente informazione di carattere teorico (salvo eventuali reminiscenze liceali).

2.2. Cronaca di un esperimento in laboratorio

Gli esperimenti che gli studenti usualmente svolgono sono:

⁽¹⁾ Tutti questi articoli si possono scaricare, in formato PDF, da [6].

⁽²⁾ Questi strumenti fanno parte di una "scatola di montaggio" realizzata da Maria Teresa De Luca sulla base di un progetto (comprendente altre "scatole") di Giuliano Bellodi, Vittoria Cinquini, Maria Teresa De Luca e Graziella Margheritis.

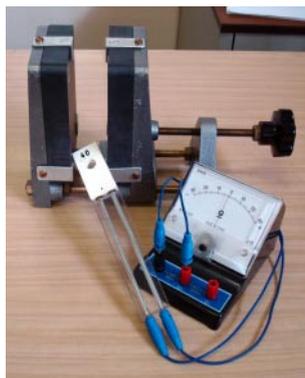


Fig. 1. – dispositivo sperimentale costituito da un magnete, avvolgimenti e galvanometro a zero centrale. La manopola sulla destra permette di variare la distanza tra le espansioni del magnete.

- 1) inserire gli avvolgimenti tra le espansioni del magnete con velocità diverse;
- 2) inserire gli avvolgimenti con inclinazioni diverse;
- 3) inserire gli avvolgimenti prima da un lato, poi dall'altro;
- 4) muovere un avvolgimento all'interno del magnete;
- 5) variare la distanza tra le espansioni del magnete;
- 6) ruotare un avvolgimento all'interno del magnete (raro).

Tralasciando l'ultimo tipo di esperimento che, simulando il funzionamento di un alternatore, suggerisce come si possa produrre una corrente alternata, gli studenti, dopo aver concluso gli esperimenti sono invitati a “costruire” una legge in grado di descrivere i fenomeni osservati. La discussione cui il docente partecipa quando ritiene opportuno (sollecitare opinioni su una proposta, esporre critiche, stimolare ulteriori riflessioni, suggerire...) prosegue, in media, per un paio d'ore. Usualmente si arriva a scrivere una legge del tipo ⁽³⁾

$$(5) \quad \mathcal{E} = \pm NBav \cos \theta ,$$

dove:

- i) N è il numero di spire,
- ii) B il modulo del campo magnetico,
- iii) a il lato dell'avvolgimento rettangolare perpendicolare alla direzione di moto dell'avvolgimento
- iv) v il modulo della velocità con cui l'avvolgimento entra tra le espansioni del magnete (o esce)
- v) θ è l'angolo formato dal vettore \hat{n} normale alla spira con il vettore del campo magnetico \vec{B} (fig. 2)

⁽³⁾ Questa “legge” è una “razionalizzazione” di quelle che emergono nella discussione. Una variante prevede la presenza nella (5) anche dell'altro lato dell'avvolgimento (reminiscenza liceale della regola del flusso?) conducendo così ad una incongruenza dimensionale.

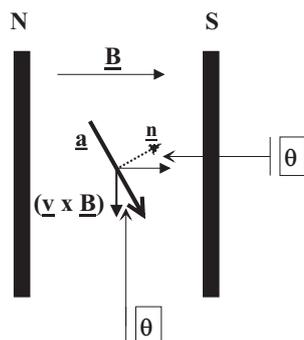


Fig. 2. – N e S sono le espansioni del magnete; \vec{a} è il lato posteriore dell'avvolgimento rettangolare^(*) si che si sta muovendo con velocità \vec{v} perpendicolare al piano del foglio ed entrante; \hat{n} è il versore perpendicolare al piano dell'avvolgimento. ^(*)La freccia permette di individuare l'angolo θ , equazione (6) e individua il senso in cui si calcola la circuitazione, equazione (7).

Il segno \pm che compare nella (5) riflette il fatto che, invertendo la direzione della velocità dell'avvolgimento (entrata/uscita) si inverte il senso di circolazione della corrente nell'avvolgimento.

A questo punto della discussione, gli studenti sono invitati a rispondere alla domanda: come possiamo valutare la “ammissibilità” dell'equazione (5)? Si tratta, naturalmente, di fare un controllo dimensionale: la (5) supera questo controllo.

È ora *necessario* cercare un'interpretazione fisica della (5). La presenza del prodotto vB richiama la componente magnetica della forza di Lorentz sulla carica unitaria positiva $\vec{v} \times \vec{B}$. Come si spiega allora il termine $\cos \theta$? Una analisi della geometria del sistema (fig. 2) indica che la (5) può essere scritta come

$$(6) \quad \mathcal{E} = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{a}$$

(dove si è posto $N = 1$). Tuttavia, la (6) non descrive tutte le osservazioni sperimentali. Infatti: se si inserisce l'avvolgimento con la sua superficie parallela alle espansioni del magnete e lo si muove nel suo piano mantenendolo all'interno del magnete, la corrente indotta è (praticamente) nulla ⁽⁴⁾. Perché? Un altro esperimento suggerisce la risposta. Si tratta di inserire l'avvolgimento tra le espansioni del magnete (con il suo piano parallelo alle espansioni) lasciando però fuori il lato posteriore e annotare il senso di circolazione della corrente nel galvanometro. Posto poi l'avvolgimento con il lato anteriore fuori dalle espansioni, lo si muove ancora in avanti: il senso della corrente si inverte. Quindi: quando entrambi i lati dell'avvolgimento sono interni alle espansioni del magnete la *fem* totale indotta (somma delle due *fem* indotte nei due lati) è nulla. Questo esperimento suggerisce che nell'equazione debbono comparire

⁽⁴⁾ L'esperimento mostra che la corrente non è esattamente zero. Ciò è dovuto alla disomogeneità del campo magnetico.

entrambi i lati dell'avvolgimento perpendicolari alla direzione del moto. E gli altri due? Emerge quindi l'idea di coinvolgere tutto l'avvolgimento e di scrivere quindi

$$(7) \quad \mathcal{E} = \oint (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}.$$

Questa equazione implica che nei due lati dell'avvolgimento paralleli alla direzione del moto, non c'è *fem* indotta ⁽⁵⁾.

Obiezione: che ne è della velocità di deriva delle cariche? Si riconosce che si dovrebbe scrivere (nell'approssimazione galileiana)

$$(8) \quad \mathcal{E} = \oint [(\vec{v}_l + \vec{v}_d) \times \vec{B}] \cdot d\vec{l},$$

ma che, trattandosi di un circuito filiforme, il contributo della velocità di deriva è nullo (perché \vec{v}_d è parallelo a $d\vec{l}$).

A questo punto si chiede agli studenti in quale sistema di riferimento hanno scritto l'equazione (7); la risposta è: nel sistema di riferimento del laboratorio. Riconosciuto che questo sistema di riferimento è anche quello del magnete, si pone la domanda: come descriviamo i fenomeni osservati nel sistema di riferimento dell'avvolgimento? La risposta spontanea è: vale ancora la (7), ma con \vec{v} che ora rappresenta la velocità del magnete rispetto all'avvolgimento (le lezioni sulla relatività sono già state svolte). Si obietta che il principio di relatività (di invarianza) richiede che le leggi della fisica abbiano la stessa *forma* in ogni sistema di riferimento inerziale e che, pertanto, la velocità che compare nella (7) non può che essere, anche nel sistema di riferimento dell'avvolgimento, la velocità \vec{v}_l dell'elemento di circuito che contiene la carica: essendo questa nulla, risulterebbe nulla anche la forza elettromotrice indotta. Si riconosce allora che, nel sistema di riferimento dell'avvolgimento, il campo magnetico, durante il moto relativo magnete-avvolgimento, varia nel tempo. Quindi, nella legge dell'induzione *debbono* comparire due termini: uno del tipo (8); l'altro, da individuare, che dipenda dalla variazione temporale del campo magnetico.

Da dove partire? L'equazione che connette il campo elettrico alla variazione temporale del campo magnetico è la terza equazione di Maxwell:

$$(9) \quad \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$

che, insieme alla

$$(10) \quad \vec{B} = \text{rot } \vec{A}$$

conduce alla

$$(11) \quad \vec{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

⁽⁵⁾ Se l'avvolgimento della fig. 2 è fatto ruotare tra le espansioni attorno al suo asse perpendicolare al piano del foglio, allora la *fem* è indotta nei due lati perpendicolari al piano del foglio.

La (11) contiene un termine esplicitamente dipendente dal tempo che si propone come un buon candidato per il nostro scopo. D'altra parte la forza di Lorentz sulla carica unitaria positiva è

$$(12) \quad \vec{F} = \vec{E} + \vec{v}_c \times \vec{B}.$$

Appare quindi ragionevole definire la *fem* come indicato nella (1) e verificare che con un semplice passaggio si perviene alla legge generale dell'induzione elettromagnetica (4). Si pone infine in evidenza come l'equazione (3) possa descrivere correttamente i fenomeni in entrambi i sistemi di riferimento (magnete, avvolgimento), come richiesto dalla teoria della relatività ristretta: si cita l'incipit del lavoro di Einstein del 1905 e si rimanda la verifica di questa possibilità ad un momento successivo.

In realtà, partendo dalla (5), è possibile un percorso alternativo. Essa, infatti può essere scritta così (ponendo $N = 1$):

$$(13) \quad \mathcal{E} = \pm Ba \cos \theta \frac{dl}{dt} = \pm \frac{d(Bal \cos \theta)}{dt} = - \frac{d\phi}{dt},$$

dove $l(t)$ è la parte del lato dell'avvolgimento parallelo alla direzione del moto che, all'istante t , è già entrata tra le espansioni del magnete, dl/dt è la velocità dell'avvolgimento e ϕ è il flusso del campo magnetico attraverso la superficie dell'avvolgimento che è già entrata tra le espansioni del magnete. Tenendo infine conto dell'esperimento relativo al moto traslazionale dell'avvolgimento all'interno del magnete (che non genera corrente indotta), si scrive

$$(14) \quad \mathcal{E} = - \frac{d(Bab \cos \theta)}{dt} = - \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} dS,$$

dove b è l'altro lato dell'avvolgimento e S è una qualunque superficie che ha l'avvolgimento come contorno ⁽⁶⁾. La (14) è la regola del flusso. Essa, come la (7), sembra descrivere i fenomeni osservati. Tuttavia la (14):

- a) non è una legge di campo
- b) non è compatibile con la relatività ristretta
- c) non permette di individuare dove è localizzata la *fem* indotta

Essa è quindi abbandonata in favore della (7).

2.3. Esercitazione epistemologica

Come esercitazione di un'analisi epistemologica di teorie fisiche che descrivono lo stesso gruppo di fenomeni, possiamo applicare alle due "descrizioni", "legge generale dell'induzione elettromagnetica" *LG* da un lato e "regola del flusso" *RF* dall'altro, i

⁽⁶⁾ L'ultimo passaggio richiede l'uso dell'equazione $\text{div } \vec{B} = 0$, cioè del fatto che il flusso del campo magnetico attraverso una qualunque superficie chiusa è nullo.

criteri di valutazione delle teorie (descrizioni) enunciati da Heinrich Hertz e riassunti nella tabella I [7] ⁽⁷⁾ ⁽⁸⁾.

TABELLA I. – *Criteri di valutazione delle teorie.* * Per precisione si intende la capacità di descrivere le relazioni essenziali del gruppo di fenomeni considerato: una teoria è più precisa di un'altra se descrive più relazioni essenziali dell'altra. ° Per semplicità si intende la capacità di usare il minor numero possibile di relazioni "superflue o vuote". Una relazione è superflua o vuota quando la sua eliminazione non riduce la capacità predittiva della teoria.

Criterio	Metodo di controllo	Esito del controllo	Tipo del controllo
Permissibilità	Regole logiche	Sì/No	Definitivo
Correttezza	Esperimento	Sì/No	Provvisorio
Adeguatezza	Precisione * Semplicità °	Discutibile	Provvisorio

- α) *Primo criterio.* Secondo Hertz, una teoria è *permessa* se non viola le regole logiche. Entrambe le "descrizioni" soddisfano questo criterio ⁽⁹⁾.
- β) *Secondo criterio.* La *LG* soddisfa il criterio della *correttezza* perché è in accordo con tutte le osservazioni sperimentali disponibili. La *RF* invece non descrive la fisica del disco di Corbino ([1-4])e, per descrivere casi particolari in cui solo una parte del circuito è in moto, deve ricorrere a scelte *ad hoc* [4]. Inoltre, la *RF* non supererebbe, verosimilmente, la verifica sperimentale proposta nel paragrafo "*A possible experimental test*" di [1].
- γ) *Terzo criterio: precisione.* La *LG* individua la parte del circuito in cui è localizzata la *fem* indotta, mentre la *RF* non è in grado di farlo. Quindi, la *LG* è più *precisa* della *RF*.
- δ) *Quarto criterio: semplicità.* L'uso, da parte di *RF*, del concetto di flusso del campo magnetico concatenato al circuito nel dominio dei fenomeni di induzione elettromagnetica può essere considerato *superfluo*: se non usiamo il concetto di flusso, non perdiamo alcuna capacità predittiva della "descrizione" (teoria). Quindi la *LG* è più semplice.

Questa esercitazione mostra che i criteri enunciati da Hertz possono essere effettivamente usati per valutare le teorie scientifiche.

⁽⁷⁾ Questa esercitazione non è svolta con gli studenti del corso di Fenomeni Elettromagnetici. È stata invece proposta all'interno di un corso della SILSIS di Pavia.

⁽⁸⁾ Hertz delinea una teoria della conoscenza scientifica nella prefazione ai *Principi della meccanica presentati in una nuova forma* [8] e nella prefazione alle *Onde elettriche* [9]. Una traduzione italiana di entrambe le prefazioni si trova in rete [10].

⁽⁹⁾ Oggi, in fisica, useremmo un criterio più ristretto: oltre alle regole logiche, una teoria dovrebbe essere anche relativisticamente invariante. Sulla base di questo criterio, la *RF* sarebbe subito eliminata.

2.4. Richiami di storia della fisica

Il docente che volesse richiamare alcuni passaggi storici di particolare rilevanza può, in particolare, soffermarsi sui contributi di Faraday, Maxwell ed Einstein. Esempi si possono trovare in [1-3,5]. Per comodità del lettore, riproduciamo di seguito alcune considerazioni.

2.4.1. Faraday

Faraday, nelle *Experimental Researches* [11], non ha scritto alcuna formula. Tuttavia, egli ha sviluppato una teoria dei fenomeni di induzione elettromagnetica, riassumibile nell'asserzione: *c'è corrente indotta ogni qualvolta c'è moto relativo tra il conduttore e le linee di forza magnetiche considerate come fisicamente esistenti*. In particolare, Faraday spiegava la corrente indotta in un circuito (indotto) dalla chiusura di un altro circuito (inducente) affermando che le linee di forza magnetiche generate dalla corrente inducente si propagano verso l'esterno intersecando così il circuito indotto; il fenomeno simmetrico si verifica quando il circuito inducente viene aperto.

È possibile esprimere, almeno parzialmente, questa legge fondamentale con una formula? Per rispondere a questa domanda, consideriamo, insieme a Faraday, il moto di un filo conduttore rigido in un campo magnetico uniforme e costante:

Dai risultati relativi alla rotazione del filo e del magnete (3097, 3106), è inoltre evidente che quando un filo si muove di moto uniforme tra linee uguali (cioè in un campo di uguale forza magnetica), la corrente di elettricità prodotta è proporzionale al tempo; inoltre [è proporzionale] alla velocità del moto. Essi provano inoltre, in generale, che la quantità di elettricità immessa in una corrente è proporzionale al numero delle linee intersecate [12].

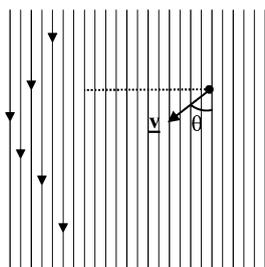


Fig. 3. – un filo metallico, perpendicolare al piano del foglio, si muove con velocità \vec{v} in un campo magnetico uniforme di cui sono disegnate le linee di forza. La linea tratteggiata orizzontale indica la direzione perpendicolare alle linee di forza e θ è l'angolo tra il vettore velocità e la direzione delle linee di forza.

Se, fig. 3, il filo è perpendicolare al piano del foglio, il campo elettrico indotto sarà proporzionale alle linee di forza intersecate in un secondo lungo la direzione perpendicolare alle linee:

$$(15) \quad E_i \propto v \sin \theta,$$

dove θ è l'angolo formato dal vettore velocità del filo con le linee di forza. Questa

equazione traduce l'asserzione di Faraday secondo cui "la corrente di elettricità prodotta è proporzionale ... alla velocità del moto". Indicando con B il parametro di proporzionalità:

$$E_i = Bv \sin \theta .$$

Sperimentalmente si verifica che

$$\vec{E}_i = \vec{v} \times \vec{B} .$$

Si osservi come questa sia l'espressione della componente magnetica della forza di Lorentz sulla carica unitaria positiva. Infine se il filo è inclinato rispetto alla normale uscente dal foglio, si ha

$$\vec{E}_i = \left[(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \frac{\vec{a}}{a} \right], \frac{\vec{a}}{a}$$

dove \vec{a} è il vettore associato al filo di modulo uguale alla sua lunghezza, avente la stessa direzione del filo e verso arbitrario.

Queste considerazioni mostrano che il secondo termine della (3) traduce in termini matematici la fisica delle linee di forza di Faraday nel caso di conduttori filiformi in moto in un campo magnetico. Naturalmente, questo termine da solo non è in grado di descrivere tutti i fenomeni di induzione elettromagnetica: come indicato dalla (3), è necessario anche un termine dipendente dalla variazione temporale del potenziale vettore (o del campo magnetico) ⁽¹⁰⁾.

2.4.2. Maxwell

Come è ben noto, Maxwell afferma ripetutamente nel suo *Trattato* che esso è la traduzione matematica della fisica di Faraday. Per esempio:

[...] È stato forse un vantaggio per la scienza il fatto che Faraday, sebbene perfettamente consapevole delle forme fondamentali dello spazio, del tempo e della forza, egli non fosse un matematico di professione. Egli non fu tentato di sviluppare le tante e interessanti ricerche matematiche che le sue ricerche avrebbero suggerito se esse fossero state espresse in forma matematica; e non si sentì impegnato a forzare i suoi risultati in una forma accettabile per il gusto matematico del tempo, o ad esprimerli in una forma che i matematici avrebbero potuto attaccare. Fu così lasciato a svolgere a piacere il proprio lavoro, a coordinare le sue idee con i fatti e ad esprimerli in un linguaggio naturale, non tecnico. Ho intrapreso questo trattato essenzialmente con la speranza di fare di queste idee la base di un metodo matematico [13].

Tuttavia, per quanto concerne l'induzione elettromagnetica, il *Trattato* di Maxwell non può essere considerato una fedele traduzione matematica della fisica di Faraday. Nella parte introduttiva e descrittiva del *Trattato* dedicata ai fenomeni di induzione, Maxwell scrive:

⁽¹⁰⁾ Si osservi come la dizione "legge di Faraday-Neumann" usata per denotare la regola del flusso tradisca la fisica di Faraday. La teoria dell'induzione elettromagnetica di Faraday è una teoria di campo; mentre la regola del flusso non è una legge di campo.

L'insieme di questi fenomeni può essere sintetizzata in una legge. Quando varia il numero di linee di induzione magnetica che passano attraverso il circuito secondario nella direzione positiva, una forza elettromotrice agisce nel circuito ed è misurata dal tasso di diminuzione dell'induzione magnetica attraverso il circuito [14].

E:

Invece di parlare di numero di linee di forza magnetica, potremmo parlare dell'induzione magnetica attraverso il circuito, cioè dell'integrale di superficie dell'induzione magnetica esteso su qualsiasi superficie confinata dal circuito [15].

Espressa matematicamente, questa legge si scrive

$$(16) \quad fem = -\frac{d\Phi}{dt},$$

dove Φ è il flusso del campo magnetico concatenato con il circuito indotto. La (16) è la "regola del flusso": Maxwell non la scrive.

Tuttavia, nel paragrafo 598 intitolato *Equazioni generali dell'intensità elettromotrice*, Maxwell considera il circuito indotto in moto rispetto al circuito inducente e ricava per il campo elettrico indotto (intensità elettromotrice) l'espressione

$$(17) \quad \vec{E}_i = \vec{v} \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad } \varphi.$$

Abbiamo scritto questa equazione usando la simbologia moderna ed in forma vettoriale (Maxwell la scrive in termini delle sue componenti).

Maxwell commenta:

Il termine contenente la nuova grandezza φ è stato introdotto per dare generalità all'espressione di \vec{E}_i . Questo termine scompare dall'integrale quando esteso all'intero circuito... L'intensità elettromotrice è stata già definita nell'art. 68. È anche chiamata l'intensità elettrica risultante, essendo la forza esercitata sull'unità di carica positiva posta in quel punto. Abbiamo ottenuto il valore più generale per questa grandezza nel caso di un corpo in moto in un campo magnetico dovuto a un circuito elettrico variabile. Se il corpo è un conduttore, la forza elettromotrice produrrà una corrente; se è un dielettrico, la forza elettromotrice produrrà solo uno spostamento elettrico. L'intensità elettromotrice, ovvero la forza su una particella, deve essere attentamente distinta dalla forza elettromotrice lungo un arco di una curva, l'ultima grandezza essendo l'integrale di linea della prima. Vedi l'art. 69 [16].

E:

L'intensità elettromotrice [campo elettrico indotto], dato dall'equazione (17), dipende da tre circostanze. La prima di queste è il moto della particella attraverso il campo magnetico. La parte della forza dipendente da questo moto è espressa dal primo termine al secondo membro dell'equazione. Esso dipende dalla [componente della] velocità della particella perpendicolare alle

linee di induzione magnetica. [...] Il secondo termine nell'equazione (17) dipende dalla variazione temporale del campo magnetico. Questa può essere dovuta o alla variazione temporale della corrente elettrica nel circuito primario, o al moto del circuito primario. [...] L'ultimo termine è dovuto alla variazione della funzione φ nelle differenti parti del campo [17].

Secondo Maxwell la velocità che compare nella (17) è la “velocità della particella”. In realtà, i calcoli effettuati da Maxwell mostrano che la velocità in questione è quella dell'elemento di circuito. Questa confusione non deve sorprendere: Maxwell non possedeva un modello di corrente, perché non possedeva un modello di elettricità. Nell'art. 569 Maxwell scrive:

La corrente elettrica non può essere concepita se non come un fenomeno cinetico. [...] Gli effetti della corrente, come l'elettrolisi, e il trasferimento di elettricità da un corpo ad un altro, sono tutte azioni progressive che richiedono tempo per essere compiute, e sono pertanto della natura dei moti. Per quanto riguarda la velocità della corrente, essa potrebbe essere dell'ordine di un decimo di pollice all'ora o di un centinaio di miglia al secondo [qui Maxwell cita il paragrafo 1648 delle *Experimental Researches* di Faraday]. Siamo così lontani dal conoscere il suo valore assoluto che non sappiamo neppure se ciò che chiamiamo direzione positiva è la vera direzione del moto o la direzione contraria [18].

Si noti che la (17) coincide con l'equazione generale dell'induzione (4) relativa al caso in cui il circuito indotto sia filiforme e, quindi, il contributo della velocità di deriva degli elettroni è nullo. Appare comunque evidente che Maxwell era ben consapevole del fatto che, quando il circuito indotto è in moto, la “regola del flusso” deve essere sostituita da una legge più generale. Il fatto che si sia radicata la “regola del flusso” e si sia dimenticata la “legge generale” di Maxwell costituisce, evidentemente, uno stimolante problema storico ⁽¹¹⁾.

2.5. Einstein

Nell'introduzione dell'articolo del 1905 che ha dato origine alla teoria della relatività, Einstein scrive:

È noto che l'elettrodinamica di Maxwell — come la si interpreta attualmente — nella sua applicazione ai corpi in movimento porta a delle asimmetrie, che non paiono essere inerenti ai fenomeni. Si pensi per esempio all'interazione elettromagnetica tra un magnete e un conduttore. I fenomeni osservabili in questo caso dipendono soltanto dal moto relativo del conduttore e del magnete, mentre secondo l'interpretazione consueta i due casi, a seconda che l'uno o l'altro di questi corpi sia quello in moto, vanno tenuti rigorosamente distinti. Se infatti il magnete è in moto e il conduttore è a riposo, nei dintorni del magnete esiste un campo elettrico con un certo valore dell'energia, che genera una corrente nei posti dove si trovano parti del conduttore. Ma se il magnete

⁽¹¹⁾ Paolantonio Marazzini e Marco Rossi stanno studiando questo problema.

è in quiete e si muove il conduttore, nei dintorni del magnete non esiste alcun campo elettrico, e si ha invece nel conduttore una forza elettromotrice, alla quale non corrisponde nessuna energia, ma che — a parità di moto relativo nei due casi considerati — dà luogo a correnti elettriche della stessa intensità e dello stesso andamento di quelle alle quali dà luogo nel primo caso la forza elettrica [19].

Nella parte del lavoro dedicata all'elettrodinamica, Einstein osserva infine:

È inoltre chiaro che l'asimmetria menzionata nell'Introduzione riguardo alla trattazione della corrente generata mediante il moto relativo di un magnete e di un conduttore sparisce. Anche le questioni relative alla “sede” della forza elettromotrice elettrodinamica (macchine unipolari) sono infondate [20] ⁽¹²⁾.

Einstein, comunque, non effettua alcun calcolo. Mostriamo ora come la legge generale (3) elimini la dissimmetria posta in evidenza da Einstein. Si consideri un circuito filiforme rigido ed un magnete in moto relativo rettilineo uniforme lungo l'asse comune $x \equiv x'$. Nel sistema di riferimento del magnete, la forza elettromotrice indotta è data dall'equazione (3) in cui la velocità della carica \vec{v}_c è uguale alla velocità \vec{V} del circuito lungo la direzione positiva dell'asse x (il contributo della velocità di deriva è nullo perché il circuito è filiforme). Poiché il campo magnetico generato dal magnete non dipende esplicitamente dal tempo, l'equazione (3) assume la forma:

$$(18) \quad \mathcal{E} = zero + \oint [(\vec{V} \times \vec{B})_y dy + (\vec{V} \times \vec{B})_z dz].$$

Nel sistema di riferimento del circuito abbiamo invece, applicando l'equazione (3) e usando le equazioni di trasformazione delle coordinate e dei campi:

$$(19) \quad \begin{aligned} \mathcal{E}' &= \oint \vec{E}' \cdot d\vec{l}' + zero = \\ &= \Gamma \oint [(\vec{V} \times \vec{B})_y dy + (\vec{V} \times \vec{B})_z dz] = \Gamma \mathcal{E}, \end{aligned}$$

dove $\Gamma = 1/\sqrt{1 - V^2/c^2}$. Naturalmente, per $\Gamma \approx 1$, $\mathcal{E}' \approx \mathcal{E}$. Il ruolo della componente magnetica della forza di Lorentz nel sistema di riferimento del magnete è svolto, nel sistema di riferimento del circuito, dal campo elettrico che emerge dalle equazioni di trasformazione dei campi; tuttavia, in entrambi i sistemi di riferimento, applichiamo la stessa equazione (3): la descrizione, come richiesto dalla teoria della relatività ristretta è la stessa.

⁽¹²⁾ Come mostrato in [1-3], la sede della *fem* indotta è, invece, una questione sperimentalmente e concettualmente significativa.

Richiamiamo, per comodità del lettore, le equazioni di trasformazione dei campi:

$$(20) \quad \begin{aligned} E'_x &= E_x, \\ E'_y &= \Gamma[E_y + (\vec{V} \times \vec{B})_y], \\ E'_z &= \Gamma[E_z + (\vec{V} \times \vec{B})_z], \end{aligned}$$

$$(21) \quad \begin{aligned} B'_x &= B_x, \\ B'_y &= \Gamma \left[B_y - \frac{1}{c^2} (\vec{V} \times \vec{E})_y \right], \\ B'_z &= \Gamma \left[B_z - \frac{1}{c^2} (\vec{V} \times \vec{E})_z \right]. \end{aligned}$$

3. Considerazioni finali

Si ritiene che i pregi di questo percorso didattico siano:

- gli studenti si divertono, anche (soprattutto) nella fase di elaborazione teorica;
- le osservazioni sperimentali condotte autonomamente dagli studenti sollecitano la loro creatività;
- si tenta una descrizione formale di tipo induttivo (di nuovo entra in gioco la creatività degli studenti);
- si sottopone l'equazione "costruita" ad un controllo dimensionale (uso di un criterio di "ammissibilità");
- si usano principi teorici generali (principio di invarianza) in un semplice e intuitivo contesto sperimentale;
- si "inventa", infine, una teoria ipotetico-deduttiva;
- gli studenti operano dapprima nel "contesto della scoperta", in cui, sullo sfondo della "conoscenza acquisita", si intrecciano osservazioni sperimentali e ipotesi teoriche; poi in quello della "giustificazione" in cui si cerca una legge generale che possa descrivere tutti i fenomeni osservati;
- sono possibili immediati e puntuali riferimenti storici a partire da quello, fondamentale, di Einstein;
- è infine possibile un'analisi epistemologica del percorso seguito.

Una volta introdotto lo studio dei fenomeni di induzione elettromagnetica in questo modo, il docente può mostrare come la legge generale (3) possa descrivere tutti i fenomeni noti, effettuando, se necessario, una selezione fra di essi e ricorrendo, se possibile, a nuove esercitazioni di laboratorio.

La trasposizione in una scuola secondaria di questo percorso presenta qualche difficoltà dal punto di vista formale: non pare possibile usare il formalismo del potenziale vettore ⁽¹³⁾.

⁽¹³⁾ È mia opinione che il bagaglio matematico mediamente acquisito dagli studenti dei licei scientifici non sia adeguato per le sue applicazioni alla fisica; questa lacuna appare peraltro in grave

Si tratta quindi di adattare (come?) la trattazione matematica al bagaglio formale posseduto dalla classe.

Un'ultima considerazione: il percorso qui suggerito per l'induzione elettromagnetica (laboratorio 'spontaneo' → costruzione di una formula → invenzione di legge generale → riferimenti storici → riflessioni epistemologiche) può, naturalmente, essere esteso ad altri argomenti. (g.g.)

* * *

Ringrazio Federica Archinti per avere riprodotto insieme a me gli esperimenti e per il suo contributo all'analisi delle discussioni con gli studenti.

Bibliografia

- [1] GIULIANI G., "A general law for electromagnetic induction" *EPL*, **81** (2008) 60002. In rete alla pagina: <http://fiscavolta.unipv.it/percorsi/epl.asp>
- [2] GIULIANI G, BONIZZONI I., *Lineamenti di Elettromagnetismo* (La Goliardica Pavese, Pavia) 2004, 375-405.
- [3] GIULIANI G., "Induzione elettromagnetica: fisica e flashbacks" *La Fisica nella Scuola*, Quad. **14** (*) 2002.
In rete alla pagina: <http://fiscavolta.unipv.it/percorsi/emi.asp>
- [4] GIULIANI G., "On electromagnetic induction",
in rete alla pagina: <http://babbage.sissa.it/abs/physics/0008006>
- [5] GIULIANI G., *G. Fis.*, **46** (2006) 213-218.
- [6] <http://fiscavolta.unipv.it/percorsi/emi.asp>
- [7] GIULIANI G., "Heinrich Hertz: fisica, metodo e filosofia", in: GUIDONE M., MUZZARELLI FORMENTINI C., (a cura di), *Roberto Clemens Galletti di Cadillac pioniere della telegrafia senza fili* Fermo (2001), pp. 111-119.
In rete alla pagina: <http://fiscavolta.unipv.it/percorsi/pdf/hertz.pdf>
- [8] HERTZ H., *Principi della meccanica presentati in una nuova forma* La Goliardica Pavese, Pavia) 1996, trad. it. a cura di Giovanni Gottardi.
- [9] HERTZ H., *Electric Waves* (Dover) 1952, p. 21. Traduzione inglese (1893) dell'edizione originale tedesca del 1892.
- [10] <http://fiscavolta.unipv.it/percorsi/pdf/ew.pdf>
- [11] FARADAY M., *Experimental Researches in Electricity* (Taylor, London) 1849-1855.
In rete all'interno del sito <http://gallica.bnf.fr>
- [12] Rif. [11], vol. III, p. 346, (3114, 3115).
- [13] MAXWELL J.C., *A Treatise on Electricity and Magnetism* vol. II (Macmillan and Co. London) 1873, p. 163 (528),
in rete all'interno del sito: <http://gallica.bnf.fr>
- [14] Rif. [13], p. 166, (531).
- [15] Rif. [13], p. 175, (541).
- [16] Rif. [13], pp. 221-222, (598).
- [17] Rif. [13], p. 222, (599).
- [18] Rif. [13], p. 196, (569).
- [19] A. Einstein, "L'elettrodinamica dei corpi in movimento", trad. it. di S. Antoci, in rete alla pagina: <http://matsci.unipv.it/persons/antoci/re/einstein05.pdf>
- [20] Rif. [19], p. 16.

contraddizione con la tendenza ad inserire sempre più argomenti di fisica moderna, sovente a scapito di un adeguato approfondimento della fisica classica. Per esempio: è pura provocazione pensare di smettere di insegnare le equazioni di Maxwell in forma integrale?