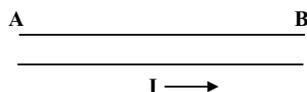


Questa rubrica si propone di stimolare la riflessione sul tipo di conoscenza prodotta dalla fisica e di porre in evidenza termini e concetti che costituiscono punti nodali per l'apprendimento della disciplina. L'approccio storico - critico, così come quello didattico, non hanno alcuna pretesa di essere esaustivi.

Legge di Ohm. In riferimento ad un conduttore ed alla figura, è usualmente chiamata "legge di Ohm" la relazione

$$(1) \quad I = \frac{V_A - V_B}{R},$$

dove I è la corrente che attraversa il conduttore, $V_A - V_B$ la differenza di potenziale



(costante) applicata ai suoi estremi ed R la resistenza (elettrica) del conduttore ⁽¹⁾. La resistenza R è legata alle proprietà del conduttore dalla relazione

$$(2) \quad R = \rho \frac{l}{A},$$

dove ρ è la resistività, l la lunghezza ed A l'area della sezione (uniforme) del conduttore. Infine, indicata con \mathcal{E} la forza elettromotrice di una pila la cui resistenza interna sia r , vale la relazione

$$(3) \quad I = \frac{\mathcal{E}}{r + R},$$

dove R è la resistenza del conduttore che collega i due poli della pila. In questo caso, la differenza di potenziale ai capi del conduttore o, identicamente, ai capi della pila è data da

$$(4) \quad V_A - V_B = \mathcal{E} - Ir,$$

George Simon Ohm (1789 - 1854), studiò sperimentalmente i fenomeni descritti dalle equazioni precedenti nel corso degli anni 1825 - 1826 ⁽²⁾; nel 1827 fornì un inquadra-

⁽¹⁾ La legge di Ohm vale anche quando ΔV è variabile. Tuttavia, tratteremo qui solo il caso di correnti continue.

⁽²⁾ Una traduzione italiana dei due principali lavori di Ohm si trova in [1]. Per una ricostruzione storica si può vedere [2] nonché i lavori in esso citati.

mento teorico complessivo dei dati sperimentali [3] ⁽³⁾. L'insieme delle conoscenze teoriche e sperimentali era caratterizzato, per quanto concerne i fenomeni della conduzione elettrica, da dati disomogenei e modelli interpretativi incompiuti e non condivisi. Per dare un'idea delle difficoltà interpretative, possiamo considerare la seguente formula scritta da Ohm (con la simbologia originale):

$$(5) \quad X = \frac{a}{b+x}.$$

Secondo Ohm, questa equazione rappresenta in modo soddisfacente i dati sperimentali. In essa:

X è l'intensità dell'effetto magnetico [della corrente], x è la lunghezza del conduttore usato, a e b sono costanti rappresentanti grandezze che dipendono dalla forza eccitatrice e dalla resistenza del resto del circuito [5].

La (5) è, chiaramente, equivalente alla (3). La (5), e non la (1) costituisce la scoperta fondamentale di Ohm: la grandezza fisica a rappresenta la forza elettromotrice (forza eccitatrice, nella terminologia di Ohm) e b la resistenza interna del generatore ⁽⁴⁾. Le difficoltà interpretative in cui si dibattevano i contemporanei di Ohm, e con cui Ohm ha dovuto fare i conti, erano in parte dovute al fatto che gli sperimentatori usavano pile voltaiche con alta resistenza interna (ignorata) e conduttori esterni di bassa resistenza.

La "versione" di Ohm della (1) e della (2) appare chiaramente in [6]

$$(6) \quad X = k\omega \frac{a}{l},$$

"...dove k indica la conducibilità, l la lunghezza, ω la sezione di un conduttore omogeneo prismatico, a la tensione elettrica stabilita ai suoi estremi..." Qui, X , come nella (5), rappresenta "l'intensità dell'effetto magnetico [della corrente]" ⁽⁵⁾.

La (1) vale solo per alcuni conduttori, detti, appunto, *ohmici*: tra questi troviamo i metalli. Tuttavia, anche nel caso dei metalli, la (1) vale solo se il metallo non è sede di una forza elettromotrice indotta. Quando un filo metallico è sede di una forza elettromotrice indotta, esso si comporta come una pila e si deve, di conseguenza, applicare la (4): si veda, in proposito, la voce (→ Induzione elettromagnetica.).

⁽³⁾ Lo "sperimentatore" Ohm era ben consapevole del rapporto tra esperimento e teoria: "In ciò consiste il merito principale del calcolo, cioè nell'offrire una tal generalità di espressioni in niuna parte ambigue da invitar sempre a nuove esperienze, e quindi nel condurre ad una cognizione più perfetta dei fenomeni della natura. Ogni teoria creata sui fatti di una classe di fenomeni naturali che non regge ad una esposizione matematica dettagliata è imperfetta, ed è incerta ogni teoria la quale non potendo essere sviluppata in tale forma esatta non è quanto si deve comprovata dall'esperienza" [4].

⁽⁴⁾ La (5) è stata "scritta" sulla base di esperimenti condotti usando una termopila come sorgente di forza elettromotrice. Inizialmente Ohm aveva usato pile voltaiche, poi abbandonate per la loro inaffidabilità: dipendenza non controllabile della forza elettromotrice e della resistenza interna dall'uso.

⁽⁵⁾ Le leggi di Ohm furono acquisite dalla comunità scientifica con lentezza: le ragioni sono controverse. Si veda, per esempio, [2] e le ricostruzioni storiche in esso citate.

L'equazione che descrive i conduttori *ohmici* (omogenei e isotropi) in forma locale si scrive

$$(7) \quad \vec{J} = \sigma \vec{E},$$

dove \vec{J} è la densità di corrente e σ la conducibilità del conduttore; \vec{E} è il campo elettrico. La (7), a differenza della (1), è sempre valida per i metalli, cioè è valida anche in presenza di forze elettromotrici indotte.

La (7) può essere ricavata partendo dall'equazione del trasporto di Boltzmann o sulla base di opportuni modelli. Il modello più semplice si basa sulle seguenti ipotesi:

- a. I portatori di carica elettrica in un metallo sono gli elettroni "liberi" dotati di carica $-e$ e massa m_e .
- b. Il loro moto sotto l'azione di un campo elettrico uniforme \vec{E} è contrastato da una "forza di attrito" $-(m_e/\tau)\vec{v}$, dove \vec{v} è la velocità degli elettroni; τ ha le dimensioni di un tempo.
- c. In condizioni stazionarie, la forza dovuta al campo elettrico è bilanciata da quella di "attrito".

Attraverso semplici passaggi si ricava la (7) e si trova che la conducibilità di un metallo è data da

$$(8) \quad \sigma = \frac{n_0 e^2 \tau}{m_e},$$

dove n_0 è il numero di elettroni "liberi" per unità di volume. Naturalmente, questo modello non dice nulla intorno al significato fisico di τ . Per ottenere informazioni su τ è necessario costruire un modello microscopico del seguente tipo:

- A. Si considera un "gas" di elettroni ognuno dei quali sia dotato di velocità v (indipendente dalla temperatura) la cui direzione sia casuale.
- B. Gli elettroni subiscono urti isotropi: un urto è isotropo se la direzione della velocità dell'elettrone dopo l'urto non è correlata a quella della velocità prima dell'urto ⁽⁶⁾. Gli urti, di durata nulla, sono (quasi) elastici ⁽⁷⁾.
- C. La velocità v che gli elettroni posseggono "naturalmente" in base al punto (A.) è molto grande rispetto a quella acquisita tra un urto e l'altro grazie al campo elettrico applicato.

Si indichi con n_0 il numero di elettroni contenuti nel volume unitario e si supponga che, all'istante $t = 0$, tutti gli elettroni subiscano un urto; si indichi inoltre con $n(t)$ il numero di elettroni per unità di volume che, all'istante t non hanno ancora subito un altro urto. Avremo allora che

$$(9) \quad dn = -n \frac{dt}{\tau},$$

⁽⁶⁾ Questa condizione è soddisfatta per gli urti dovuti al moto vibrazionale degli ioni del metallo per $T \gg \theta_D$ dove θ_D è la temperatura di Debye del metallo.

⁽⁷⁾ Sviluppando completamente il modello si dimostra che l'energia acquisita dagli elettroni grazie al campo elettrico applicato viene trasferita al solido (effetto Joule).

dove τ ha le dimensioni di un tempo. Ne segue che

$$(10) \quad n = n_0 e^{-t/\tau}$$

e che l'intervallo di tempo medio tra due urti successivi sarà dato da

$$(11) \quad \langle t \rangle = \frac{1}{n_0} \int_0^\infty t \cdot \frac{1}{\tau} n dt = \tau,$$

τ è quindi l'intervallo di tempo medio tra due urti successivi. Per il rame a temperatura ambiente (300 K) $\tau \approx 2 \times 10^{-14}$ s. Se si procede calcolando in sequenza, in presenza di un campo elettrico costante, la distanza media percorsa da un elettrone tra due urti successivi e la velocità media di un elettrone tra due urti successivi (velocità di deriva) si ottengono di nuovo la (7) e la (8). Si noti che, in base alla (8), la dipendenza della conducibilità dalla temperatura è inclusa nella dipendenza dalla temperatura di τ . Per gli urti dovuti al moto vibrazionale degli ioni del metallo, $\tau \propto 1/T$ per temperature sufficientemente alte rispetto alla temperatura di Debey del metallo: la temperatura ambiente soddisfa questa condizione ⁽⁸⁾.

La trattazione basata sull'equazione del trasporto di Boltzmann permette di calcolare la "funzione di distribuzione" $f(\vec{k}, \vec{r})$ in condizioni stazionarie distinte dall'equilibrio termico. La $f(\vec{k}, \vec{r})$ rappresenta la probabilità di occupazione da parte di un elettrone dello stato individuato dal vettore d'onda \vec{k} quando l'elettrone si trova nel punto individuato dal vettore posizione \vec{r} [7]. L'equazione del trasporto è scritta nella cosiddetta "approssimazione del tempo di rilassamento" (che coincide con l'intervallo di tempo medio tra due urti successivi del modello precedente): si suppone che in condizioni stazionarie lo scostamento della $f(\vec{k}, \vec{r})$ dal valore dell'equilibrio termico sia piccola e che la sua variazione temporale ($\partial f / \partial t$) dovuta al campo elettrico applicato e ai gradienti di temperatura sia uguale a $-[f(\vec{k}, \vec{r}) - f_0(\vec{k}, \vec{r})] / \tau(\vec{k})$, dove f_0 è la funzione di distribuzione all'equilibrio termico (funzione di distribuzione di Fermi-Dirac). Si trova che gli elettroni di conduzione di un metallo partecipano ai processi di trasporto con le proprietà di quelli la cui energia è prossima all'energia di Fermi (\mathcal{E}_F).

Per quanto riguarda la conduzione elettrica, ciò implica che la velocità che determina l'intervallo di tempo medio tra due urti successivi è la cosiddetta "velocità di Fermi", indipendente dalla temperatura: si ritrova così la (7). Nell'approssimazione per cui $\mathcal{E} = \hbar^2 k^2 / 2m_e$, si ritrova la (8) con $\tau = \tau_F$ (F indica il livello di energia di Fermi) e con m_e uguale alla cosiddetta "massa effettiva" degli elettroni. La velocità di Fermi in un metallo è dell'ordine della velocità dell'elettrone sulla prima orbita del modello di Bohr dell'atomo di idrogeno ($\approx 10^6$ m s⁻¹). La velocità di deriva degli

⁽⁸⁾ A temperature basse rispetto a quella di Debye, $\sigma \propto T^{-5}$ (per urti dovuti alle vibrazioni degli ioni). In generale, per i metalli, si può scrivere che la resistività è data da $\rho = \rho_L + \rho_i$, dove ρ_L è la parte dovuta alle vibrazioni degli ioni e ρ_i quella dovuta ai difetti reticolari. Per $T \rightarrow 0$, $\rho_L \rightarrow 0$: la resistività residua è quindi dovuta ai difetti reticolari.

elettroni è invece molto piccola: $\approx 7.34 \times 10^{-5} \text{ m s}^{-1}$ in un filo di rame con sezione di 1 mm^2 percorso dalla corrente di 1A. Questi valori giustificano l'assunzione di cui al punto (C.) del precedente modello ⁽⁹⁾.

Il primo modello microscopico della conduzione elettrica nei metalli è dovuto a Paul Drude (1863-1906) [8]. Il modello di Drude prevede due portatori di carica elettrica pari a $\pm e$.

Per "il quanto elementare di elettricità e " Drude assume "il numero trovato da J.J. Thomson... , che si accorda bene con i dati ottenuti con l'elettrolisi". Inoltre: "Lasciamo per ora aperta la questione se l'elettrone posseda o no una piccolissima massa". Pertanto, scrivendo $mv^2/2 = \alpha T$ dove α è una costante "universale" ⁽¹⁰⁾ e T è la temperatura assoluta, Drude parla di "massa apparente" della particella [9]. Drude trova per la conducibilità, scritta per un solo portatore di carica (ed usando la nostra notazione):

$$(12) \quad \sigma_{Drude} = \frac{n_0 e^2 l v}{4 \alpha T},$$

dove l è il "libero cammino medio". Drude commenta: "Siccome nei metalli puri σ è inversamente proporzionale alla temperatura T , i termini [del tipo] $n_0 l v$ debbono essere considerati come quasi indipendenti da T [10] ⁽¹¹⁾. Nello stesso lavoro, Drude calcola la conducibilità termica K del gas di elettroni ed il rapporto tra quest'ultima e la conducibilità elettrica, ottenendo

$$(13) \quad \frac{K}{\sigma} = \frac{4}{3} \frac{\alpha^2}{e^2} T.$$

Nel 1853, Gustav Wiedemann e Rudolf Franz avevano trovato sperimentalmente una (ragionevole) proporzionalità tra le due conducibilità di diversi metalli alla stessa temperatura [11]. Nel 1881, Ludwig Lorenz aveva mostrato, con accurate misure effettuate tra 0 e 100 °C, che il rapporto K/σ è proporzionale alla temperatura assoluta e che il coefficiente di proporzionalità è approssimativamente lo stesso per i metalli esaminati [12]. La (13) di Drude apparve quindi come un incoraggiante risultato sulla via della comprensione di questi fenomeni di trasporto. Qualche anno dopo (1906), Lorentz modifica il modello di Drude usando come portatori di carica solo gli elettroni cui attribuisce una distribuzione di velocità maxwelliana: ottiene così una formula che differisce per un fattore numerico dalla (13), ma che, non ostante teoricamente più

⁽⁹⁾ Per quanto riguarda invece la capacità termica degli elettroni di conduzione (che interviene nella formula della conducibilità termica) si trova che solo una frazione di elettroni dell'ordine di T/T_F (dove $T_F = \mathcal{E}_F/k_B$ è la temperatura di Fermi) contribuisce alla capacità termica.

⁽¹⁰⁾ Si noti che $\alpha = (3/2)k_B$ dove k_B è la costante di Boltzmann. Il simbolo k per la costante di Boltzmann è stato introdotto da Planck nel famoso articolo del 14 dicembre 1900 in cui compare anche la costante h . Il lavoro di Drude è del febbraio 1900.

⁽¹¹⁾ errore Usando la relazione $(1/2)mv^2 = \alpha T$, la (12) assume la forma $\sigma_D = (1/2)\sigma$: a parte il fattore $(1/2)$, essa coincide con la formula corretta (8). Il fattore $(1/2)$ che compare nella formula di Drude "adattata" è dovuto ad un errore nel calcolo della velocità di deriva. Si osservi, tuttavia, che questo "adattamento" della formula di Drude ne trascende l'impianto concettuale: esso è quindi un anacronismo storico.

corretta (perché tiene conto della distribuzione maxwelliana delle velocità), si discosta maggiormente dai dati sperimentali [13]. Lorentz commenta: “Se preferiamo le [mie] formule, come a mio giudizio dovremmo fare, l’accordo trovato nel paragrafo precedente [tra le formule di Drude ed i dati sperimentali] deve essere considerato come prodotto da una coincidenza fortuita” [14] ⁽¹²⁾. Gli sviluppi successivi confermeranno questa intuizione di Lorentz: il meccanismo della conduzione elettrica nei metalli sarà chiarito — insieme al problema della capacità e della conducibilità termica nonché della suscettività magnetica degli elettroni di conduzione — solo con l’applicazione della statistica di Fermi-Dirac e lo sviluppo della teoria delle bande dei solidi cristallini ⁽¹³⁾. Per una ricostruzione storica, si veda, per esempio, [16]. (g.g.)

Bibliografia

- [1] HÄUSERMANN G., *La Fisica nella Scuola, Quaderno 14* (2002) 134-160; il secondo dei due articoli si trova anche in rete all’indirizzo: <http://ulisse.sissa.it/bUl0306002.jsp>
- [2] MARAZZINI P., *Le leggi di Ohm, 2005*. In rete all’indirizzo: <http://fisicavolta.unipv.it/percorsi/pdf/0hm.pdf>
- [3] OHM G. S., *Die galvanische Kette, mathematisch bearbeitet* (T. H. Riemann, Berlin) 1827. Traduzione italiana a cura di A. Perugia: *Teoria matematica del circuito galvanico* (Tipografia Vannucchi, Pisa) 1847.
- [4] Rif. [3], versione italiana, p. 47.
- [5] Rif. [1], p. 155.
- [6] OHM G. S., *Ann. Phys. (Leipzig)* **6** (1826) 459-469 (1826) (in particolare pp. 460-461). In rete all’indirizzo: <http://gallica.bnf.fr/>
- [7] Si veda, per es., J. M. ZIMAN, *The Principles of the Theory of Solids* (Cambridge U.P., Cambridge) 1965, cap. 7.
- [8] DRUDE P., *Ann. Phys. (Leipzig)* **1** (1900) 566-613. In rete all’indirizzo: <http://gallica.bnf.fr/>
- [9] Si veda, per esempio, ECKERT M., SCHUBERT H., TORKAR G., *The roots of Solid-State Physics Before Quantum Mechanics* in: L. HODDESON, E. BRAUN, J. TEICHMANN, S. WEART, (Editors) *Out of the Crystal Maze* (Oxford University Press, New York Oxford) 1992, pp. 3-87 (in particolare pp.28-29).
- [10] Rif. [8], p. 576.
- [11] WIEDEMANN G. and FRANZ R., *Ann. Phys. (Leipzig)* **89** (1856) 497-531. In rete all’indirizzo: <http://gallica.bnf.fr/>
- [12] LORENZ L., *Ann. Phys. (Leipzig)* **89** (1881) 422-447. In rete all’indirizzo: <http://gallica.bnf.fr/>
- [13] LORENTZ H. A., *The Theory of Electrons (Editions Jacque Gabais, Sceaux, 1992)*. Riproduzione della seconda edizione del 1916. In rete all’indirizzo: <http://gallica.bnf.fr/>
- [14] Rif. [13], p. 67.

⁽¹²⁾ Tenendo conto dell’errore commesso da Drude nel calcolo della conducibilità elettrica (nota ⁽¹¹⁾), la formula di Lorentz è più vicina ai dati sperimentali rispetto a quella di Drude. Lorentz calcola correttamente la velocità di deriva degli elettroni; tuttavia, non rileva l’errore di calcolo di Drude.

⁽¹³⁾ Se si scrive $K/\sigma T = A$, l’espressione di A risulta (in notazione moderna): $3(k_B^2/e^2)$ per Drude; $2(k_B^2/e^2)$ per Lorentz; $(\pi^2/3)(K_B^2/e^2) = 2.44 \times 10^{-8} \text{ W}\Omega\text{K}^{-2}$ secondo il calcolo quantistico, per temperature grandi rispetto a quella di Debye. Si noti come, per tutte le trattazioni, A , detto numero di Lorenz, dipenda solo da due costanti “universali”: k_B ed e . Tipicamente, i valori sperimentali variano tra 2.37×10^{-8} (*Cu*) e 3.2×10^{-8} (*W*) a 100°C [15]. Le discrepanze che ancora permangono tra previsioni teoriche e dati sperimentali sono verosimilmente dovute alle approssimazioni che stanno alla base della trattazione teorica: indipendenza del moto degli elettroni dal potenziale cristallino, scattering elettrone — elettrone ignorato.

- [15] KITTEL C., *Introduction to Solid State Physics*, third edition (Wiley & Sons, New York) 1968, p. 222.
- [16] HODDESON L., BAYM G. and ECKERT M., *The Development of the Quantum Mechanical Electron Theory of Metals* in L. HODDESON, E. BRAUN, J. TEICHMANN, S. WEART, (Editors) *Out of the Crystal Maze* (Oxford University Press, New York Oxford) 1992, p. 88-181.

Induzione elettromagnetica. Come è noto, i fenomeni di induzione elettromagnetica furono scoperti e studiati da Michael Faraday (1791-1867) a partire dal 1831 [1] ⁽¹⁾. Nel *Trattato*, Maxwell, dopo aver presentato i fenomeni, afferma che:

L'insieme di questi fenomeni può essere descritto da una legge. Quando varia il numero delle linee di induzione magnetica che passano attraverso il circuito secondario nella direzione positiva, una forza elettromotrice agisce lungo il circuito; essa è misurata dalla velocità di diminuzione dell'induzione magnetica attraverso il circuito [2].

E, più avanti:

Invece di parlare di numero linee di forza magnetica, possiamo parlare di induzione magnetica attraverso il circuito, o di integrale di superficie dell'induzione magnetica esteso su qualunque superficie delimitata dal circuito [3].

In formula (che però Maxwell non scrive) e in notazione moderna:

$$(1) \quad \mathcal{E} = - \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} dS.$$

La (1) è comunemente citata nei manuali come “legge del flusso” o legge di Faraday-Neumann ⁽²⁾. Si osservi come la (1) non sia una legge di campo e non sia una legge causale ⁽³⁾. Infatti: a) essa connette quanto accade sulla superficie S all'istante t con quanto accade, allo stesso istante, sul circuito filiforme che delimita la superficie S : non è quindi una legge di campo perché presuppone la propagazione di azioni fisiche con velocità infinita; b) la superficie S , purché delimitata dal circuito, è arbitraria: non è quindi possibile stabilire una connessione causale tra quanto accade sulla superficie

⁽¹⁾ Nel 1830, Joseph Henry aveva osservato alcuni fenomeni di induzione elettromagnetica senza pubblicare i risultati.

⁽²⁾ lineeforzaFaraday non scrisse alcuna formula. Ciò non ostante, Faraday sviluppò una teoria consistente di tutti i fenomeni di induzione elettromagnetica da lui studiati basata sull'idea che in un conduttore circola corrente ogni qualvolta ci sia moto relativo tra il conduttore e le linee di forza magnetica intese come fisicamente esistenti (e non come mere entità teoriche). La fisica delle linee di forza di Faraday è parzialmente tradotta in formule dal secondo termine della (7). Nel caso di una forza elettromotrice indotta da una corrente variabile nel circuito inducente, Faraday suppone che le linee di forza magnetiche si muovano dal circuito inducente verso il circuito indotto, quando la corrente aumenta; in direzione opposta, quando la corrente del circuito inducente diminuisce. La teoria di Faraday è una teoria di campo. Si veda, per esempio, [4] disponibile in rete, oppure [5].

⁽³⁾ Una legge espressa da una formula matematica può diventare una legge causale solo all'interno di un'immagine del Mondo. Per esempio, la legge $\vec{F} = m\vec{a}$ non è, di per sé, una legge causale. Lo diventa all'interno di una (plausibile) immagine del Mondo in cui si afferma, plausibilmente, che la forza causa l'accelerazione (e non viceversa.)

S e quanto accade nel circuito. Per questi motivi, è opportuno parlare di “regola del flusso” invece che di “legge” ⁽⁴⁾.

È assai meno noto che nel *Trattato* di Maxwell compare un paragrafo (598) intitolato “General equations of electromotive intensity” (Equazioni generali dell’intensità elettromotrice) [6]. In esso, Maxwell, trattando il caso dell’interazione di due circuiti percorsi da corrente e supponendo che il circuito considerato “indotto” sia in moto, perviene alla seguente formula per “l’intensità elettromotrice” (in notazione moderna):

$$(2) \quad \vec{E} = \vec{v} \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad } \varphi,$$

dove φ e \vec{A} sono i potenziali scalare e vettore. Maxwell, che scrive la (2) in termini delle componenti dei vettori, commenta:

Il termine contenente la nuova grandezza φ è stato introdotto per dare generalità all’espressione di \vec{E} . Questo termine scompare dall’integrale quando esteso all’intero circuito. . . L’intensità elettromotrice è stata già definita nell’art. 68. È anche chiamata l’intensità elettrica risultante, essendo la forza esercitata sull’unità di carica positiva posta in quel punto. Abbiamo ottenuto il valore più generale per questa grandezza nel caso di un corpo in moto in un campo magnetico dovuto a un circuito elettrico variabile. Se il corpo è un conduttore, la forza elettromotrice produrrà una corrente; se è un dielettrico, la forza elettromotrice produrrà solo uno spostamento elettrico. L’intensità elettromotrice, ovvero la forza su una particella, deve essere attentamente distinta dalla forza elettromotrice lungo un arco di una curva, l’ultima grandezza essendo l’integrale di linea della prima.

E, più avanti:

L’intensità elettromotrice, data dall’equazione (2), dipende da tre circostanze. La prima di queste è il moto della particella attraverso il campo magnetico. La parte della forza dipendente da questo moto è espressa dal primo termine al secondo membro dell’equazione. Esso dipende dalla [componente della] velocità della particella perpendicolare alle linee di induzione magnetica. [. . .] Il secondo termine nell’equazione (2) dipende dalla variazione temporale del campo magnetico. Questa può essere dovuta o alla variazione temporale della corrente elettrica nel circuito primario, o al moto del circuito primario. [. . .] L’ultimo termine è dovuto alla variazione della funzione φ nelle differenti parti del campo [7].

Si osservi che: a) Maxwell parla di “velocità della particella”. In realtà, quella che compare nella sua deduzione è la velocità dell’elemento infinitesimo di circuito. D’altra parte, non possedendo un modello di corrente elettrica (si veda la voce → Teoria di Maxwell), Maxwell non era in grado di collegare la velocità dell’elemento

⁽⁴⁾ In generale si richiede che una legge: a) valga in ogni possibile caso interno al dominio di applicazione della teoria cui essa appartiene; b) permetta di individuare quali siano i processi fisici operanti nei vari casi. Come vedremo, la “regola del flusso” non soddisfa queste condizioni.

di circuito a quella che chiamiamo velocità di deriva della cariche elettriche in un conduttore. b) Maxwell non commenta il fatto che la “regola del flusso” è un caso particolare della legge generale. c) la (2) contiene quella che sarà chiamata “componente magnetica della forza di Lorentz”. d) Il fatto che la “regola del flusso”, e non la (2), si sia radicata in letteratura, costituisce un ignorato e (quindi) irrisolto problema storico.

Molti autori hanno mostrato come la “regola del flusso” presenti una serie di problemi quando una parte del circuito indotto è in moto. Tra questi, Richard Feynman che, dopo aver discusso un caso in cui si muove una parte estesa (non filiforme) del conduttore, scrive [8]: “La legge del flusso non funziona in questo caso. Essa deve essere applicata a circuiti in cui il *materiale* del circuito rimane lo stesso. Quando il materiale del circuito cambia, dobbiamo tornare alle leggi fondamentali. La fisica *corretta* è sempre data dalle due leggi fondamentali”

$$(3) \quad \vec{F} = e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}),$$

$$(4) \quad \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

Per sviluppare l’idea implicitamente contenuta in questa affermazione di Feynman è sufficiente definire—*seguendo Maxwell*—la forza elettromotrice indotta come l’integrale di linea della forza di Lorentz su una carica unitaria positiva (divisa, dimensionalmente, per una carica):

$$(5) \quad \mathcal{E} = \oint_l (\vec{E} + \vec{v}_c \times \vec{B}) \cdot d\vec{l},$$

dove, per motivi che saranno chiari in seguito, abbiamo aggiunto il suffisso c alla velocità della carica. Ponendo:

$$(6) \quad \vec{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t},$$

si ottiene immediatamente la forma integrale dell’equazione (2) di Maxwell dove, però, ora, la velocità che compare in essa è, inequivocabilmente, la velocità della carica:

$$(7) \quad \mathcal{E} = -\oint_l \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{l} + \oint_l (\vec{v}_c \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}.$$

La (7) deve essere considerata come la legge dell’induzione elettromagnetica: i due termini in essa contenuti rappresentano, rispettivamente, il contributo dovuto alla variazione temporale del campo magnetico e quello dovuto al moto delle cariche nel campo magnetico. La (7) è una legge di campo: in essa, la forza elettromotrice indotta all’istante t appare come l’integrale di linea, allo stesso istante, del “campo elettrico indotto” (l’intensità elettromotrice di Maxwell) calcolato, in ogni punto del circuito,

all'istante t . Se si pone $\vec{v}_c = \vec{v}_l + \vec{v}_d$, dove \vec{v}_l è la velocità dell'elemento infinitesimo di circuito e \vec{v}_d è la velocità di deriva delle cariche ⁽⁵⁾, la (7) assume la forma

$$(8) \quad \mathcal{E} = - \oint_l \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot \vec{dl} + \oint_l (\vec{v}_l \times \vec{B}) \cdot \vec{dl} + \oint_l (\vec{v}_d \times \vec{B}) \cdot \vec{dl}.$$

La (8) mostra che anche la velocità di deriva delle cariche contribuisce, in generale, alla forza elettromotrice indotta: se il circuito è filiforme, il contributo della velocità di deriva alla forza elettromotrice si annulla perché \vec{v}_d è parallela a \vec{dl} ; se il circuito indotto è un conduttore esteso, il contributo della velocità di deriva alla forza elettromotrice è, in generale, diverso da zero ⁽⁶⁾. In [10] sono sviluppate tutte le implicazioni di questa definizione di forza elettromotrice. In particolare, si dimostra che la (8), espressa in funzione del campo magnetico, assume la forma:

$$(9) \quad \mathcal{E} = \left[-\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} dS + - \oint_l (\vec{v}_l \times \vec{B}) \cdot \vec{dl} \right] + \left\{ \oint_l (\vec{v}_l \times \vec{B}) \cdot \vec{dl} + \oint_l (\vec{v}_d \times \vec{B}) \cdot \vec{dl} \right\},$$

dove sono stati racchiusi tra parentesi quadre e graffe i termini che derivano, rispettivamente, dal primo e dal secondo termine del secondo membro della (7). In [10], si mostra come la “regola del flusso” possa portare, data la struttura dell'equazione (9), a predizioni corrette in diversi casi. Anche in questi casi, tuttavia, si deve ricorrere alla (7) per porre in evidenza i processi fisici in atto.

In [11], sono discussi diversi casi di applicazione della (7) e dell'uso della “regola del flusso”. Qui ne discutiamo solo due: come primo significativo esempio, consideriamo il caso “classico” (discusso anche da Maxwell, con la “regola del flusso”) illustrato nella figura 1.

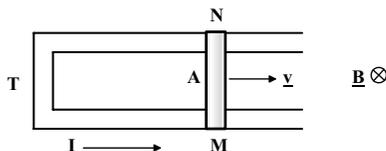


Fig. 1. – Barra metallica in moto su un telaio metallico in un campo magnetico uniforme.

⁽⁵⁾ Si può usare qui la legge galileiana di composizione delle velocità perché $v_l \ll c$ e $v_d \ll c$.

⁽⁶⁾ In [9], è trattato in dettaglio il caso del “disco di Corbino” costituito da un disco conduttore con un foro al centro: due elettrodi di alta conducibilità posti sulle due circonferenze del disco (interna ed esterna) assicurano che tali circonferenze siano luoghi equipotenziali quando esse siano collegate ai poli di una pila. In questa configurazione il disco è attraversato da una corrente radiale. L'applicazione di un campo magnetico statico perpendicolare al disco genera, per il terzo termine del secondo membro della (8) (gli altri due termini sono nulli), una forza elettromotrice circolare che genera, a sua volta, una corrente circolare. La trattazione del disco di Corbino sulla base della (8) conduce, tra l'altro, alla formula della magnetoresistenza senza dover utilizzare alcun modello microscopico della conduzione elettrica.

La barra metallica MN scorre senza attrito sul telaio metallico T con velocità costante \vec{v} nel campo magnetico statico ed uniforme \vec{B} perpendicolare al piano del foglio ed entrante. Applicando la legge dell'induzione (7), si ottiene immediatamente che è indotta nella barra una forza elettromotrice $\mathcal{E} = vBa$, dove a è la lunghezza della barra (7). È immediato verificare che la “regola del flusso” conduce allo stesso risultato. Tuttavia, essa oscura il processo fisico responsabile della forza elettromotrice indotta (la componente magnetica della forza di Lorentz) e non è in grado di localizzarne la “sede” (8), (9)

Come secondo esempio, consideriamo il disco di Faraday (si veda la figura 2).

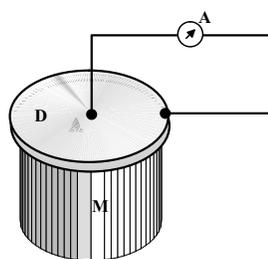


Fig. 2. – Disco di Faraday.

D è un disco metallico separato elettricamente dal magnete cilindrico M ; l'amperometro A è connesso mediante fili conduttori e contatti striscianti al disco D . Disco e magnete possono ruotare intorno al comune asse verticale separatamente o insieme. I risultati qualitativi ottenuti da Faraday sono elencati nella tabella I.

Faraday spiega i risultati ottenuti sulla base dell'ipotesi della nota (2) e dell'ipotesi aggiuntiva secondo cui, mentre il magnete ruota intorno al proprio asse, le sue linee di forza magnetiche rimangono in quiete [12]. Quantitativamente, i fenomeni di induzione del disco di Faraday sono descritti dal secondo termine della (7) (10): se, diversamente da quanto illustrato in figura 2, si mantiene una simmetria radiale, è

(7) Il primo termine del secondo membro della (7) è nullo perché il campo magnetico non dipende dal tempo; il secondo termine è quello responsabile della forza elettromotrice indotta. Il contributo della velocità di deriva degli elettroni è nullo perché, per effetto Hall, essa è, nella barra, diretta da N verso M .

(8) La barra svolge la funzione di una pila: in [10] si trova la trattazione completa di questo circuito in corrente (quasi) continua (la resistenza del circuito varia nel tempo).

(9) Diversamente da come sovente si sostiene, la questione della “sede” della forza elettromotrice è fisicamente (e operativamente) significativa: la forza elettromotrice è localizzata in quei tratti del circuito in cui la corrente entra dal punto a potenziale minore ed esce dal punto a potenziale maggiore. Nel caso discusso, la barra. Un caso limite si ha quando la forza elettromotrice indotta è uniformemente distribuita sull'intero circuito filiforme: in questo caso la differenza di potenziale tra due punti qualunque del circuito è nulla. (Esempio: spira circolare in campo magnetico uniforme, perpendicolare alla spira e variabile nel tempo; oppure, i “fili” di corrente circolare nel disco di Corbino [9].)

(10) La (7) è applicata nel sistema di riferimento del laboratorio (in cui è in quiete l'asse dell'apparato di Faraday).

TABELLA I. – *Fenomeni osservati da Faraday con il dispositivo della figura 2. Si noti che nel sistema di riferimento del laboratorio l'asse del magnete è in quiete.*

Cosa si muove?	Moto relativo disco-magnete	Moto relativo disco-laboratorio	Corrente indotta
Disco	Sì	Sì	Sì
Magnete	Sì	No	No
Disco e magnete	No	Sì	Sì

possibile tenere conto in modo rigoroso anche del contributo della velocità di deriva alla forza elettromotrice indotta [13]. (g.g.)

Bibliografia

- [1] FARADAY M., *Experimental Researches in Electricity* (R. and J. E. Taylor, London) 1849-1855. In rete all'indirizzo: <http://gallica.bnf.fr/>
- [2] MAXWELL J. C., *A Treatise on Electricity and Magnetism*, vol. II, (McMillann and Co., London) 1873, p. 166, par. 531. In rete all'indirizzo: <http://gallica.bnf.fr/>
- [3] Ivi, p. 175, par. 541.
- [4] GIULIANI G., *La Fisica nella Scuola, Quaderno 14* (2002); in rete all'indirizzo: <http://fisicavolta.unipv.it/percorsi/pdf/ind.aq.pdf>, pp. 20-27 (della versione in rete).
- [5] GIULIANI G., BONIZZONI I., *Lineamenti di elettromagnetismo* (La Goliardica Pavese, Pavia) 2004, pp. 391-395; 400-401.
- [6] Rif. [2], pp. 219-222, par. 598-599.
- [7] Rif. [2], pp. 240-241, par. 599.
- [8] FEYNMAN R., LEIGHTON R. and SANDS M., *The Feynman Lectures on Physics* (Addison Wesley, Reading, Ma.) 1964, vol. II, p. 17-2.
- [9] Rif. [5], pp. 395-398; in rete: <http://fisicavolta.unipv.it/percorsi/pdf/corbino.pdf>
- [10] Rif. [5], pp. 375-406. Oppure rif. [4], versione in rete, pp. 8-13.
- [11] GIULIANI G., *On electromagnetic induction*, <http://babbage.sissa.it/abs/physics/0008006>.
- [12] Rif. [1], vol. III, pp. 336-337; par. 3090. In rete all'indirizzo: <http://gallica.bnf.fr/>
- [13] Rif. [5], pp. 391-395; 398-399. Oppure rif. [4], versione in rete, pp. 14-16; 18-19.