



Lo scorso 25 gennaio 2016, dopo quella dell'11 marzo 2015, la Direzione Generale per gli ordinamenti scolastici e la valutazione del sistema nazionale di istruzione ha proposto un'ulteriore simulazione della seconda prova scritta di Fisica, il cui testo si può reperire all'indirizzo web

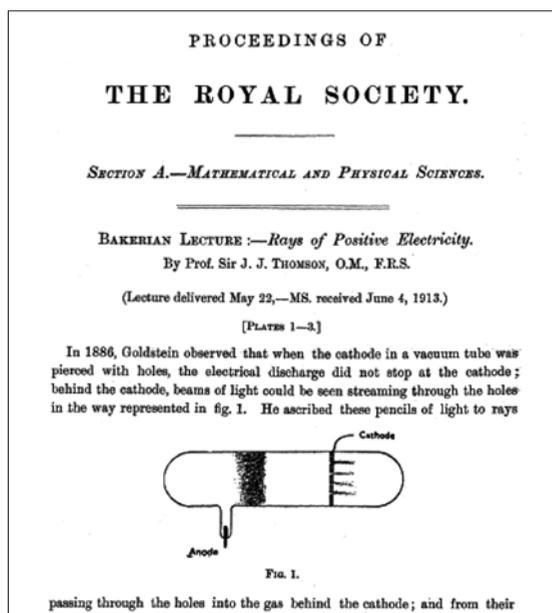
<http://questionariolsosa.miur.carloanti.it/pdf/2015-2016/fisica1.pdf>

La prova era strutturata in due problemi "attinenti a situazioni reali o simulate, a scelta alternativa dello studente, e in sei quesiti di carattere generale" (Nota prot. n. 286 del 14 Gennaio 2016).

Proponiamo una soluzione commentata del Problema 1, a cura di Silvano Sgrignoli e Riccardo Urigu; qui di seguito riportiamo il testo originale del Problema1 (<http://questionariolsosa.miur.carloanti.it/pdf/2015-2016/fisica1.pdf>).

Problema n. 1: Il metodo delle parabole di Thomson

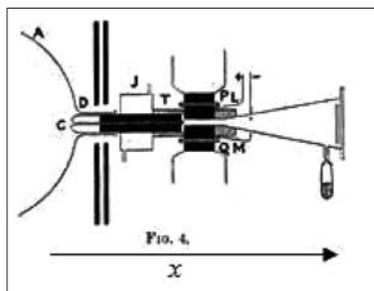
Navigando in Internet per una ricerca sugli isotopi hai trovato il seguente articolo di J. J. Thomson pubblicato sui "Proceedings of The Royal Society" nel 1913.



L'esperimento a cui l'articolo fa riferimento può essere considerato come uno tra i più importanti del secolo ventesimo, nel passaggio dalla Fisica cosiddetta Classica alla Fisica Moderna, più precisamente l'inizio della Fisica Subatomica.

Nell'articolo Thomson descrive le sue osservazioni sui cosiddetti "raggi canale", formati da quelli che noi oggi chiamiamo ioni, quando attraversano un campo elettrico uniforme \vec{E} e un campo magnetico, pure uniforme, \vec{B} paralleli tra loro e perpendicolari alla velocità delle particelle \vec{v} .

Nel disegno riprodotto qui affianco ed estratto dall'articolo originale, le particelle entrano attraverso l'ugello C e, con velocità parallele tra loro, attraversano il campo elettrico e quello magnetico nella regione identificata dalle lettere PLQM. I campi sono paralleli tra di loro e perpendicolari al piano della pagina.



Nell'articolo Thomson scrive:

“Supponi che un fascio di queste particelle si muova parallelamente all'asse x , colpendo un piano fluorescente perpendicolare al loro cammino in un punto O . Se prima di raggiungere il piano agisce su di esse un campo elettrico parallelo all'asse y , il punto ove le particelle raggiungono il piano è spostato parallelamente all'asse y di una distanza pari a:

$$y = \frac{q}{mv_0^2} A_1$$

dove q , m e v_0 , sono rispettivamente la carica, la massa e la velocità delle particelle e A_1 è una costante dipendente dal campo elettrico e dal cammino della particella ma indipendente da q , m , v_0 . Se invece sulle particelle agisce un campo magnetico anch'esso parallelo all'asse y , le particelle vengono deflesse parallelamente all'asse z e il punto ove le particelle raggiungono il piano è spostato parallelamente all'asse z di una distanza pari a:

$$z = \frac{q}{mv_0} A_2$$

dove A_2 è una costante dipendente dal campo magnetico e dal cammino della particella ma indipendente da q , m e v_0 ”.

E più oltre continua: “Così, tutte le particelle con lo stesso rapporto q/m in presenza di campo elettrico e magnetico colpiscono il piano su una parabola che può essere visualizzata facendo incidere le particelle su una lastra fotografica.”

E ancora: “Poiché la parabola corrispondente all'atomo di idrogeno è presente in praticamente tutte le foto ed è immediatamente riconoscibile [...] è molto facile trovare il valore di q/m per tutte le altre.”

Un esempio di queste foto è riportato nella figura 1:

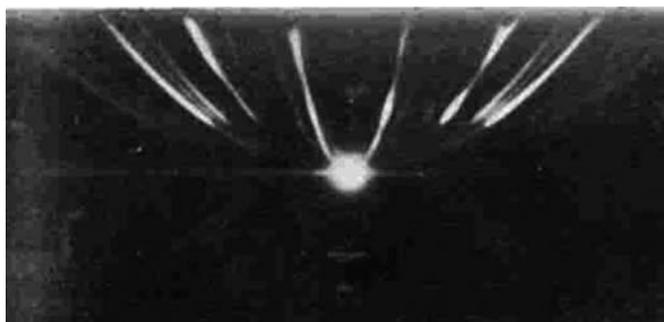


Figura 1.

che viene riportata, ingrandita e invertita in colore, nella figura 2:

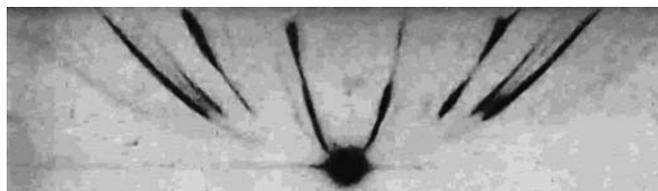


Figura 2.

1. Fissando un sistema di riferimento con origine nel punto O ove le particelle colpiscono il piano fluorescente in assenza del campo elettrico e di quello magnetico, l'asse x nella direzione del moto delle particelle e l'asse y nella direzione comune dei campi elettrico e magnetico, dimostra dalle informazioni date la validità delle formule riportate da Thomson per le deflessioni nelle direzioni y e z dovute al campo elettrico e al campo magnetico.
Nella dimostrazione assumi che gli effetti di bordo siano trascurabili e che la forza di Lorentz sia sempre diretta nella direzione z .
2. Dimostra che le particelle con lo stesso rapporto q/m formano sul piano $x = 0$ una parabola quando è presente contemporaneamente sia il campo elettrico sia quello magnetico; determina l'equazione della parabola in funzione del rapporto q/m e dei parametri A_1 e A_2 .
3. Ricordando che gli ioni di idrogeno hanno il massimo rapporto q/m , individua la parabola dovuta agli ioni di idrogeno. Scegli poi un'altra parabola delle foto e determina il rapporto q/m relativo a questa parabola, in unità dello stesso rapporto q/m per l'idrogeno. Descrivi dettagliatamente il procedimento seguito.
4. Immagina ora di ruotare il campo elettrico in modo che sia diretto nella direzione z e con verso tale da deflettere le particelle in verso opposto alla deflessione dovuta al campo magnetico. Disegna la direzione e verso del campo elettrico e di quello magnetico affinché essi operino come descritto e determina la condizione che deve essere verificata affinché la deflessione totale sia nulla. Ipotizzando di utilizzare il dispositivo come strumento di misura, quale grandezza potrebbe misurare?

Rubrica di Valutazione del Problema

Indicatori per la valutazione
COMPRESIONE e CONOSCENZA <i>Comprende la richiesta.</i> <i>Conosce i contenuti.</i>
ABILITÀ LOGICHE e RISOLUTIVE <i>È in grado di separare gli elementi dell'esercizio evidenziandone i rapporti.</i> <i>Usa un linguaggio appropriato.</i> <i>Sceglie strategie risolutive adeguate.</i>
CORRETTEZZA dello SVOLGIMENTO <i>Esegue calcoli corretti.</i> <i>Applica Tecniche e Procedure, anche grafiche, corrette.</i>
ARGOMENTAZIONE <i>Giustifica e Commenta le scelte effettuate.</i>
VALUTAZIONE <i>Formula autonomamente giudizi critici di valore e di metodo.</i>

- *Esaminare la situazione fisica proposta formulando le ipotesi esplicative attraverso modelli o analogie o leggi.*
- *Formalizzare situazioni problematiche e applicare gli strumenti matematici e disciplinari rilevanti per la loro risoluzione.*
- *Interpretare e/o elaborare i dati proposti, anche di natura sperimentale, verificandone la pertinenza al modello scelto.*
- *Descrivere il processo risolutivo adottato e comunicare i risultati ottenuti valutandone la coerenza con la situazione problematica proposta.*

Prova simulata di Fisica. Soluzione del problema 1

Il metodo delle parabole di Thomson

a cura di

Silvano Sgrignoli, Bergamo sisgri@iol.it

Riccardo Urigu, Torino r.urigu@aif.it

Quesito 1. Consideriamo la deflessione dovuta al solo **campo elettrico** (in assenza di campo magnetico).

Indichiamo con E l'intensità del campo elettrico, con v_0 la velocità iniziale dello ione (in direzione x), con q la sua carica, con m la massa e con d la distanza percorsa sotto l'influenza del campo – ovvero tra le placchette L e M . Indichiamo con ϑ l'angolo di deflessione, cioè l'angolo che la direzione finale della velocità assume rispetto alla direzione iniziale x .

Trascurando gli eventuali effetti di bordo, avremo:

$$\text{accelerazione: } a_y = \frac{qE}{m}$$

$$\text{tempo di volo: } t = \frac{d}{v_0}$$

$$\text{velocità acquistata (in direzione } y): v_y = a_y t = \frac{qEd}{mv_0}$$

$$\text{deflessione: } n_E = \tan \vartheta = \frac{v_y}{v_0} = \frac{qEd}{mv_0^2}.$$

Consideriamo ora l'angolo di deflessione φ dovuto al solo **campo magnetico** (in assenza di campo elettrico).

Indichiamo con B l'intensità del campo magnetico tra i poli P e Q ; come suggerito dal testo del problema, oltre a trascurare gli effetti di bordo ammettiamo che la forza di Lorentz sia sempre diretta nella direzione z .¹

Procedendo in modo analogo a quanto fatto sopra, avremo:

$$\text{accelerazione: } a_z = \frac{qv_0B}{m}$$

$$\text{tempo di volo: } t = \frac{d}{v_0}$$

$$\text{velocità acquistata (in direzione } z): v_z = a_z t = \frac{qBd}{m}$$

$$\text{deflessione: } n_B = \tan \varphi = \frac{v_z}{v_0} = \frac{qBd}{mv_0}.$$

Nelle ipotesi fatte, gli spostamenti y_s e z_s al fondo del tubo sono proporzionali alle deflessioni ora calcolate.² Indicando con A il fattore di proporzionalità (dipendente dalla distanza del fondo del tubo dalla zona di deflessione e dal valore di d), sarà dunque:³

$$y_s = A \tan \vartheta = A \frac{qEd}{mv_0^2} = A_1 \frac{q}{mv_0^2} \quad (1)$$

$$z_s = A \tan \varphi = A \frac{qBd}{mv_0} = A_2 \frac{q}{mv_0} \quad (2)$$

con A_1 e A_2 indipendenti da q , m e v_0 .

Quesito 2. Prima di affrontare il quesito, dobbiamo domandarci: è lecito pensare attivi contemporaneamente i due campi, elettrico e magnetico, e ritenere invariati gli effetti che sopra abbiamo calcolato separatamente?

In generale i due effetti non sono indipendenti e, quindi, bisogna analizzare la situazione in dettaglio.

La forza magnetica dipende dalle sole componenti x e z della velocità e queste non cambiano sotto l'azione del campo elettrico (che è diretto come l'asse Y); la forza elettrica non dipende dalla velocità.

Sia la deviazione elettrica che quella magnetica, però, dipendono dal tempo di volo nel campo e il campo magnetico – facendo ruotare il vettore velocità senza variane il modulo – modifica v_x e, conseguentemente, il tempo di volo.

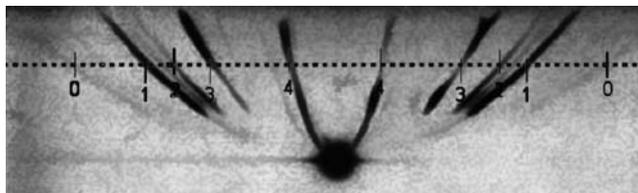
Per poter combinare i due effetti calcolati sopra, dunque, dovremo ammettere che l'effetto del campo magnetico sia debole, così da non modificare apprezzabilmente v_x e il tempo di volo nella zona di deflessione, tempo che potremo quindi continuare a calcolare come d/v_0 .

A questo punto possiamo riconoscere che le due espressioni di y_s e z_s trovate sopra, prese assieme, danno in forma parametrica l'equazione di una parabola. È facile ricavare l'equazione in forma esplicita, eliminando v_0 . Si ottiene così:⁴

$$y_s = \frac{A_1 m}{A_2^2 q} z_s^2 = \frac{E}{AB^2 d} \frac{m}{q} z_s^2 \quad (3)$$

Quesito 3. L'idrogeno è l'elemento con il rapporto m/q più basso, perchè gli altri ioni hanno masse maggiori e numero di cariche di ionizzazione sicuramente minori del numero di massa (vi sono uno o più neutroni nel nucleo). Dunque la parabola corrispondente all'idrogeno (se presente nella fotografia) è quella più allargata di tutte.

Per individuare la parabola corrispondente all'idrogeno e determinare poi i rapporti m/q che si possono ricavare dalla foto, abbiamo sovrapposto all'immagine della Figura 2 del problema una sorta di righello graduato, così che sia possibile a chi legge riscontrare direttamente la procedura che seguiremo. (Lo studente, invece, dovrebbe prendere misure analoghe con un righello graduato, operando su una stampa della Figura 2 originale).



Elaborazione della Figura 2 del problema.

Osservando l'immagine, si nota che la parabola più ampia, contrassegnata con 0, risulta appena leggibile. Il fatto che la traccia sia debole dovrebbe indicare che lo ione corrispondente era poco abbondante – il che sembra strano per l'idrogeno. Nondimeno, per il momento, assumeremo che questa sia la traccia corrispondente agli ioni H^+ .

Misuriamo dunque le distanze tra i punti corrispondenti, contrassegnati dallo stesso indice; i valori delle distanze Δz sono espressi in unità del righello e sono riportati nella tabella seguente (la penultima colonna rappresenta i valori di m/q , avendo assunto 1 per l'idrogeno; l'ultima colonna riporta i valori di q/m , con la stessa convenzione):

N	Δz	$(\Delta z/\Delta z_0)^2$	$(\Delta z_0/\Delta z)^2$
0	53	1,0	1,0
1	39	1,8	0,54
2	32	2,7	0,36
3	25	4,5	0,22
4	9,5	31,1	0,032

Questo risponde al quesito, ma i risultati trovati appaiono strani se si prova ad utilizzarli per individuare le specie ioniche corrispondenti. Torneremo sulla questione in appendice.

Quesito 4. L'asse X ha direzione e verso concordi con la velocità \vec{v}_0 ; supponiamo che il campo magnetico sia applicato nella direzione e verso dell'asse Y ; conseguentemente, la forza magnetica sugli ioni positivi si esercita nella direzione e verso dell'asse Z . Per equilibrarla con la forza elettrica, il campo corrispondente deve avere la stessa direzione e verso opposto. Se il verso del campo magnetico è quello opposto, anche il verso del campo elettrico deve essere ribaltato.

La condizione di equilibrio si può scrivere come:

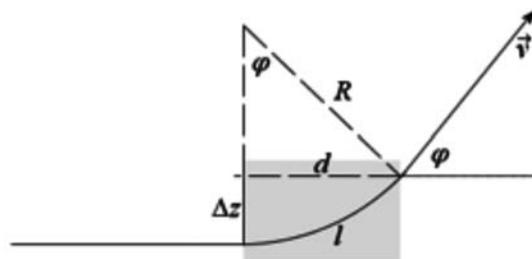
$$qvB = qE \Rightarrow v = E/B.$$

Dai valori di E e di B sarà dunque possibile ricavare la velocità v degli ioni non deviati. Con l'inserimento di un diaframma, inoltre, il dispositivo diverrebbe un *selettore di velocità* in quanto consentirebbe di eliminare dal fascio gli ioni con velocità diverse da quelle di uno stretto intervallo selezionato.

APPENDICE 1 – Deflessione magnetica, un ragionamento alternativo

Evitiamo di assumere che la forza di Lorentz "sia sempre diretta nella direzione z ", discostandoci da quanto suggerito nel testo del problema.

Per ricavare la deflessione magnetica, possiamo riferirci a quanto rappresentato nella figura seguente:



Deviazione del fascio nell'attraversare il campo magnetico (supposto entrante nel foglio, nella regione in grigio).

Indichiamo con R il raggio dell'orbita circolare descritta dallo ione e con l la lunghezza del tratto curvilineo effettivamente percorso. Eguagliando le espressioni dell'accelerazione di Lorentz e dell'accelerazione centripeta, possiamo scrivere:

$$\frac{qv_0B}{m} = \frac{v_0^2}{R}.$$

Semplificando, si ottiene:

$$R = \frac{mv_0}{qB}.$$

Si può, allora, ricavare:

$$\sin \varphi = \frac{d}{R} = \frac{qBd}{mv_0}.$$

Infine, ammettendo che l'angolo φ sia piccolo e, quindi, si possano confondere tra loro seno e tangente:

$$\tan \varphi \cong \sin \varphi = \frac{qBd}{mv_0}$$

che coincide con l'espressione ricavata in precedenza (in quel caso assumendo una direzione fissa per la forza magnetica).

Dalla figura si ricava facilmente anche l'espressione per lo spostamento dello ione, Δz , all'uscita dalla zona di deflessione:

$$\Delta z = R(1 - \cos \varphi).$$

Tuttavia, se qui si approssima in modo elementare come si è fatto sopra e si pone $\cos \varphi \cong 1$ si ottiene ... $\Delta z \cong 0$, che non è esattamente quello che ci si aspetterebbe.

Si può aggirare l'ostacolo, considerando che:

$$\Delta z = R(1 - \cos \varphi) = R(1 - \sqrt{1 - \sin^2 \varphi})$$

Sfruttando l'approssimazione $\sqrt{1 - x^2} \cong 1 - x^2/2$ e usando le espressioni di $\sin \varphi$ e di R ricavate sopra, possiamo allora scrivere:⁵

$$\Delta z \cong \frac{mv_0}{qB} \left(1 - \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{qBd}{mv_0} \right)^2 \right] \right) = \frac{d}{2} \frac{qBd}{mv_0}.$$

Si vede così, in definitiva, che il piccolo spostamento determinato dalla forza magnetica nella zona di deflessione può essere scritto nella forma:

$$\Delta z \cong A_2 \frac{q}{mv_0}$$

con A_2 indipendente da m , q e v_0 .

In conclusione: il ragionamento qui sviluppato è un po' più "ortodosso" di quello suggerito dal testo e porta alle medesime conclusioni, al costo – però – di qualche calcolo in più.

APPENDICE 2 – Quali ioni

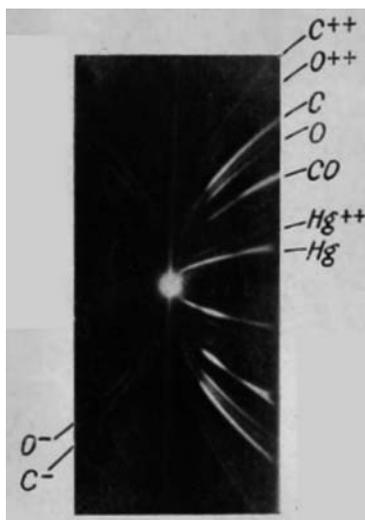
Ci si attenderebbe, in mancanza di altre indicazioni, di avere tra gli ioni l'ossigeno (O^+) e l'azoto (N^+) derivanti dall'aria, nonché il mercurio (Hg^+), quest'ultimo a causa del suo impiego nella pompa a vuoto dell'apparato di Thomson.

L'ossigeno (molecolare) potrebbe forse corrispondere all'ultimo valore della tabella (31,1 anziché 32,0), ma il mercurio ($A = 200,6$ u) sembra essere assente e così l'azoto ($A = 14,01$ u) e l'ossigeno atomico ($A = 16,00$ u). Resterebbe poi da capire a che cosa attribuire gli altri valori...

Come si legge anche nel testo del problema, l'articolo di Thomson dichiara esplicitamente: "[...] la parabola corrispondente all'atomo di idrogeno è presente praticamente in tutte le foto [...]".

Ma, in realtà, in quella foto l'idrogeno non c'è!

Di fatto, la stessa foto è riportata in un libro, successivo all'articolo di Thomson e scritto da F. W. Aston.⁶ E, a margine della foto, in quella edizione sono indicati gli isotopi. L'immagine in questione è qui di seguito (nel libro sono riportate tre fotografie nella stessa tavola; qui riproduciamo soltanto quella che ci interessa):



La foto delle parabole nel libro di F. W. Aston, *Isotopes*.

Nell'immagine sono identificati i vari ioni e la parabola che avevamo associato all'idrogeno è, invece, attribuita allo ione C^{++} . (Sono individuati anche due ioni negativi, dei quali non ci occupiamo.)

Sulla scorta di queste informazioni, possiamo riesaminare le nostre misure. Aggiungiamo alla tabella i valori del rapporto m/q desunti dai valori noti delle masse atomiche, e i rapporti tra questi valori e il primo di essi – da confrontare con i rapporti che avevamo determinato sperimentalmente in riferimento al presunto idrogeno.

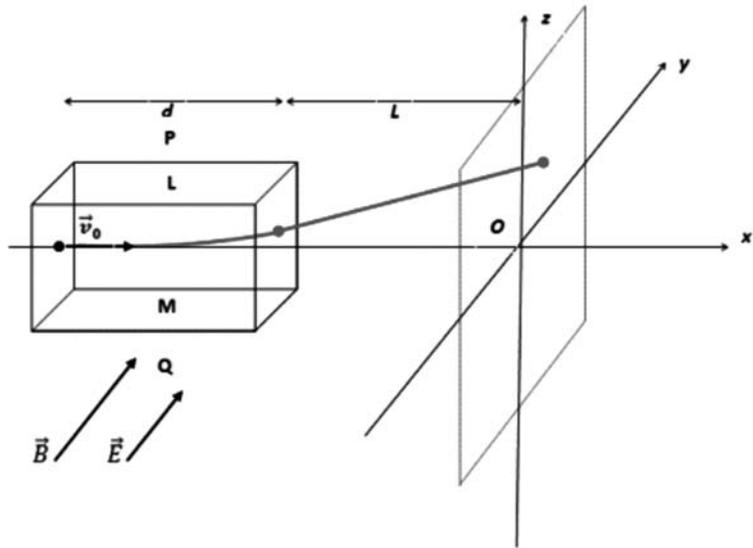
N	Δz	$(\Delta z/\Delta z_0)^2$	ione	m/q	$(m/q)/(m/q)_0$
0	53	1,0	C^{++}	6,005	1,0
1	39	1,8	C^+	12,01	2,0
2	32	2,7	O^+	16,00	2,7
3	25	4,5	CO^+	28,01	4,7
4	9,5	31,1	Hg^+	200,6	33,4

Misure sulla foto raffrontate ai valori previsti per gli ioni indicati da Aston

Tenendo conto della grossolanità della nostra misura sulla foto, si può dire che i conti, adesso, tornano.

APPENDICE 3 – Senza approssimare subito

Questa parte non è pensata per gli studenti. Il suo scopo è di consentire ai colleghi insegnanti di capire meglio la portata dell'approssimazione suggerita dal testo per risolvere il problema (un'approssimazione non abituale per gli studenti). Solitamente, per risolvere un problema, si imposta un modello rispondente alle leggi fisiche note e, soltanto all'ultimo, si cerca di semplificare i risultati con opportune approssimazioni. Ci proponiamo di fare così anche in questo caso.



Rappresentazione schematica dell'apparato di J. J. Thomson.

3.1 Nella zona di deflessione

Per studiare il moto nella zona di deflessione, dove sono attivi i campi \vec{B} ed \vec{E} , scriviamo l'equazione dinamica:⁷

$$m\dot{\vec{v}} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$$

che deve essere associata alle condizioni iniziali:

$$\begin{aligned}\vec{v}(0) &\equiv (v_0; 0; 0) \\ \vec{s}(0) &\equiv (-(d+L); 0; 0)\end{aligned}$$

e alla definizione dei campi, supposti uniformi e costanti in tutta la regione di deflessione $-(d+L) < x < -L$:

$$\vec{E} \equiv (0; E; 0) \quad \vec{B} \equiv (0; B; 0).$$

Nel seguito, inoltre, assumeremo:

$$\vec{v} \equiv (v_x; v_y; v_z).$$

In tutto ciò ci siamo riferiti a una terna destrorsa di assi coordinati XYZ, posta come stabilito dal testo del problema, e abbiamo indicato con L la distanza tra la zona di deflessione e il piano fluorescente al fondo del tubo, mentre d , lo ricordiamo, è la lunghezza in direzione x della zona di deflessione.

Con queste assunzioni, possiamo calcolare:

$$\vec{v} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ 0 & B & 0 \end{vmatrix} \equiv (-Bv_z; 0; Bv_x)$$

Dunque l'equazione dinamica (vettoriale) equivale al sistema:

$$\begin{cases} m\dot{v}_x = -qBv_z \\ m\dot{v}_y = -qE \\ m\dot{v}_z = -qBv_x \end{cases}$$

La seconda equazione è indipendente dalle altre e, integrandola, si ottiene subito:

$$v_y = \frac{q}{m} Et. \quad (4)$$

Integrando un'altra volta, si ottiene la componente y dell'equazione del moto:

$$y = \frac{qE}{2m} t^2. \quad (5)$$

Per le altre due equazioni, iniziamo col porre $\omega \equiv \frac{qB}{m}$, da cui:

$$\begin{cases} \dot{v}_x = -\omega v_z \\ \dot{v}_z = \omega v_x \end{cases}$$

Ora è facile verificare, derivando e sostituendo, che le due equazioni:

$$v_x = v_0 \cos \omega t \quad (6)$$

$$v_z = v_0 \sin \omega t \quad (7)$$

sono soluzioni del sistema e rispettano le condizioni iniziali per la velocità. (Per ricavare esplicitamente queste soluzioni, si può sfruttare uno dei metodi standard).⁸

A questo punto l'integrazione successiva risulta immediata e ci permette di ottenere:

$$x = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t - (d + L) \quad (8)$$

$$z = \frac{v_0}{\omega} (1 - \cos \omega t) \quad (9)$$

che sono le equazioni orarie di un moto circolare uniforme.

Unendo le tre equazioni orarie (8), (5) e (9) si ottiene (sempre in forma parametrica) la traiettoria nella zona di deflessione: è un'elica circolare, con asse parallelo all'asse Y e passo crescente.

La proiezione di questa traiettoria sul piano XZ è la circonferenza di equazione:

$$(x + d + L)^2 + \left(z - \frac{v_0}{\omega}\right)^2 = \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2$$

il cui raggio è $R = \frac{v_0}{\omega} = \frac{mv_0}{qB}$.

3.2 Gli spostamenti sullo schermo

Indichiamo con t_1 il tempo impiegato dalla particella per attraversare la regione, di lunghezza d , nella quale sono presenti i campi. Dalla (8) avremo:

$$t = t_1, \quad x = -L \Rightarrow \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t_1 - d = 0 \Rightarrow \sin \omega t_1 = \frac{\omega d}{v_0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_1 = \frac{1}{\omega} \arcsin\left(\frac{\omega d}{v_0}\right) = \frac{R}{v_0} \arcsin\left(\frac{d}{R}\right).$$

Ricaviamo, quindi, le componenti della velocità all'uscita dalla zona di deflessione, sostituendo nelle equazioni (6), (4) e (7):

$$v_x(t_1) = v_0 \cos\left[\arcsin\left(\frac{d}{R}\right)\right] = v_0 \sqrt{1 - \left(\frac{d}{R}\right)^2} = v_0 \sqrt{1 - n_B^2}$$

$$v_y(t_1) = \frac{qE}{m\omega} \arcsin\left(\frac{d}{R}\right) = \frac{qER}{mv_0} \arcsin\left(\frac{d}{R}\right) = \frac{qER}{mv_0} \arcsin(n_B)$$

$$v_z(t_1) = \omega d = v_0 \frac{d}{R} = v_0 n_B$$

dove abbiamo posto $n_B \equiv \frac{d}{R} = \frac{qBd}{mv_0}$.

Infine possiamo calcolare le coordinate y_s e z_s di arrivo sullo schermo:

$$y_s = y(t_1) + v_y(t_1) \cdot t_2 = \frac{qER^2}{2mv_0^2} [\arcsin(n_B)]^2 + \frac{qER}{mv_0} \arcsin(n_B) \cdot \frac{L}{v_0 \sqrt{1 - n_B^2}}$$

$$z_s = z(t_1) + v_z(t_1) \cdot t_2 = R[1 - \sqrt{1 - n_B^2}] + \frac{Ln_B}{\sqrt{1 - n_B^2}}$$

dove $t_2 = \frac{L}{v_x(t_1)} = \frac{L}{v_0 \sqrt{1 - n_B^2}}$ è il tempo di volo della particella tra il punto d'uscita dalla zona di deflessione, $x = -L$, e lo schermo fluorescente, $x = 0$.

In queste espressioni, a caratterizzare il campo elettrico appare la sola variabile E , mentre tanto n_B che R dipendono dal campo magnetico. Per ridurre le due variabili a una sola, sostituiamo R con d/n_B ; poniamo anche $n_E \equiv \frac{qEd}{mv_0^2}$, ottenendo in definitiva:

$$y_s = n_E \left[\frac{d}{2} \left(\frac{\arcsin(n_B)}{n_B} \right)^2 + L \cdot \frac{\arcsin(n_B)}{n_B \sqrt{1 - n_B^2}} \right] \quad (10)$$

$$z_s = d \cdot \frac{1 - \sqrt{1 - n_B^2}}{n_B} + L \cdot \frac{n_B}{\sqrt{1 - n_B^2}} \quad (11)$$

3.3 Approssimando, alla fine

Osserviamo, innanzitutto, che l'espressione della deviazione "elettrica" y_s contiene termini "magnetici". A rigore, soltanto in assenza del campo \vec{B} questa espressione si riduce a⁹:

$$y_s = n_E \left(\frac{d}{2} + L \right) = \frac{qEd}{mv_0^2} \left(\frac{d}{2} + L \right),$$

che è esattamente l'espressione usata nella soluzione "ufficiale".

Dunque, come già dicevamo discutendo del Quesito 2, i moti nelle due direzioni y e z non sono indipendenti tra loro e, quindi, non è corretto determinarli separatamente (l'uno in assenza dell'altro) e poi "comporli".

Tuttavia è lecito farlo *approssimando*, se l'influenza del campo \vec{B} sulla deviazione in direzione y può essere considerata trascurabile.

Per valutare (e poi applicare) il livello di approssimazione necessario, scegliamo n_B come variabile caratterizzante gli effetti magnetici; consideriamo, dunque, i fattori contenenti n_B che compaiono nelle due espressioni (10) e (11) e sviluppiamoli in serie:

$$\left(\frac{\arcsin(n_B)}{n_B}\right)^2 = 1 + \frac{n_B^2}{3} + O(n_B^4)$$

$$\frac{\arcsin(n_B)}{n_B\sqrt{1-n_B^2}} = 1 + \frac{2n_B^2}{3} + O(n_B^4)$$

$$\frac{1-\sqrt{1-n_B^2}}{n_B} = \frac{n_B}{2} + O(n_B^3)$$

$$\frac{n_B}{\sqrt{1-n_B^2}} = n_B + O(n_B^3)$$

Considerando solamente i termini fino al secondo ordine in n_B , sostituiamo nelle (10) e (11):

$$y_s \cong n_e \left[\frac{d}{2} \left(1 + \frac{n_B^2}{3} \right) + L \left(1 + \frac{2n_B^2}{3} \right) \right]$$

$$z_s \cong d \cdot \frac{n_B}{2} + Ln_B = n_B \left(\frac{d}{2} + L \right).$$

In definitiva, risostituendo a n_e e n_B il loro valori, abbiamo:

$$y_s \cong \frac{qEd}{mv_0^2} \left(\frac{d}{2} + L \right) + \frac{1}{3} \frac{qEd}{mv_0^2} \left(\frac{qBd}{mv_0} \right)^2 \left(\frac{d}{2} + 2L \right) \quad (12)$$

$$z_s \cong \frac{qBd}{mv_0} \left(\frac{d}{2} + L \right)$$

Se ignoriamo il secondo addendo nell'espressione di y_s , cioè se limitiamo lo sviluppo al primo ordine, otteniamo esattamente il risultato di J. J. Thomson, con

$$A_1 = Ed \left(\frac{d}{2} + L \right) \text{ e } A_2 = Bd \left(\frac{d}{2} + L \right).$$

Ma quale peso avrebbe, in realtà, il termine che stiamo trascurando? E, nel caso concreto, è davvero trascurabile?

Per rispondere, è necessario sapere qualcosa di più sulle caratteristiche dell'apparato sperimentale, informazioni che l'autore non fornisce nell'articolo del 1913. Fortunatamente, in un lavoro successivo sono riportate alcune dimensioni "tipiche":¹⁰

$$d = 3 \text{ cm}$$

$$L = 40 \text{ cm}$$

$$h = 1,5 \text{ mm (spazio tra le placchette)}$$

Con questi dati è possibile stimare quali fossero i valori di d/R nell'esperimento e ricavarne che il termine del second'ordine in n_B (che rappresenta l'influenza delle forze magnetiche sulla deviazione "elettrica") conti un po' meno dell'1%. In relazione a spostamenti y_s di qualche centimetro, quali dovevano aversi sulla lastra fotografica, ciò corrisponde a una variazione di qualche decimo di millimetro – certamente non apprezzabile nelle immagini ottenute.

In conclusione, si può affermare che l'approssimazione di forza magnetica costante, suggerita dal testo del problema, unita alla "sovrapposizione" delle deviazioni separate, si rivela essere sostanzialmente equivalente a uno sviluppo al primo ordine in $n_B = d/R$, e porta al risultato senza richiedere calcoli eccessivamente complicati.

Tuttavia gli studenti non sono abituati a considerare (approssimativamente) fissa la direzione di una forza il cui orientamento vari di pochi gradi e, a quanto pare, molti si sono trovati in difficoltà: forse sarebbe stato opportuno spendere qualche parola in più per rendere la cosa meno controintuitiva, anche soltanto affermando che è lecito trascurare la piccola rotazione della forza "con buona approssimazione".

Ci sembra opportuno sottolineare, comunque, che tutti i nostri ragionamenti sono stati sviluppati ammettendo che i campi deflettenti siano rigorosamente uniformi nella regione di interesse e si annullino, senza effetti di bordo, fuori di essa. Questo è certamente poco realistico ... in effetti J. J. Thomson ha mostrato altrove¹⁰ che le conclusioni alle quali si giunge (per deviazioni piccole e nell'approssimazione di una forza magnetica sempre orientata come l'asse Z) restano valide anche quando i campi non rispettano esattamente questa ipotesi.

Un'ultima considerazione: ci siamo limitati al calcolo non relativistico. Per la verità J. J. Thomson non dice con che tensione fossero accelerati gli ioni nel tubo e, quindi, quale potesse essere la loro velocità. Tuttavia (a pag. 10 dell'articolo del 1913 citato nel testo del problema) si afferma incidentalmente che le particelle si possono muovere con velocità molto elevata fino, in qualche caso, a $v = 2 \times 10^8$ cm/s. Usando come riferimento questo valore (che corrisponde alla velocità acquistata da un protone che sia accelerato da una differenza di potenziale di 20 kV), si ricava un valore di $\gamma = 1/\sqrt{1 - (v/c)^2}$ che differisce dall'unità per un fattore $2 \cdot 10^{-5}$. Questo giustifica la nostra scelta.

Note

¹ Questa scelta può apparire troppo drastica e un po' sconcertante: in effetti sappiamo che la forza magnetica non ha direzione costante, ma ruota con il vettore velocità, mantenendosi perpendicolare ad esso. In appendice svolgeremo un diverso ragionamento, senza fare ricorso alla semplificazione qui adottata.

² La proporzionalità vale non soltanto per gli spostamenti compiuti con velocità costante dopo la deflessione, ma anche per i piccoli spostamenti Δy e Δz che si determinano all'uscita dalla regione dei campi. Questo perché tali spostamenti sono proporzionali alle rispettive velocità medie che, nell'approssimazione adottata di moto uniformemente accelerato con velocità iniziale nulla, hanno valore pari a metà delle corrispondenti velocità finali v_y e v_z .

³ Per comodità e maggiore chiarezza, indichiamo con y_s e z_s , anziché semplicemente con y e z , gli spostamenti sullo schermo posto al fondo del tubo.

⁴ In realtà, se il campo B è orientato come l'asse Y , si hanno deviazioni nel solo verso positivo dell'asse Z e, quindi, si ottiene soltanto un arco di parabola collocato nel I quadrante del piano

YZ. Per ottenere anche l'arco simmetrico, come si vede nella foto, è necessario invertire il campo magnetico, continuando ad esporre la lastra fotografica nella nuova situazione.

⁵ L'approssimazione indicata si può ricavare in modo elementare svolgendo i passaggi seguenti:

$$\left(1 - \frac{x^2}{2}\right)^2 = 1 + \frac{x^4}{4} - x^2 \cong 1 - x^2$$

e considerando poi la radice quadrata delle espressioni scritte.

⁶ *Isotopes*, E. Arnold, London 1922. Francis William Aston (1877-1945), già collaboratore di J. J. Thomson, Premio Nobel per la Chimica nel 1922 per la scoperta degli isotopi attraverso lo spettrometro di massa, strumento ideato dallo stesso Aston. La foto è visibile in rete: <https://archive.org/stream/isotopes00asto#page/n40/mode/1up>

⁷ Usiamo il punto sovrascritto per indicare la derivata temporale, per esempio: $\dot{v}_x \equiv a_x$, $\dot{x} \equiv v_x$.

⁸ Per esempio, è possibile moltiplicare la seconda equazione per il numero immaginario i e sommarla alla prima. Si ottiene che la derivata temporale di $v_x + iv_z$ risulta pari a $i\omega(v_x + iv_z)$ e questo porta a cercare la soluzione nell'esponenziale $v_0 e^{i(\omega t + \varphi_0)}$. Separando la parte reale e la parte immaginaria, si arriva al risultato cercato. Oppure si possono disaccoppiare le due equazioni, derivando rispetto al tempo e sostituendo a secondo membro. In questo modo si ottiene $\frac{d^2}{dt^2} v_x = -\omega^2 v_x$ (e l'analogia per la componente z). Questo porta a cercare una soluzione armonica, della forma $v_0 \cos(\omega t + \varphi_0)$.

⁹ Per ricavare questa espressione dalla (10) si può calcolare il limite di γ_s per $B \rightarrow 0$ ovvero per $n_B \rightarrow 0$.

¹⁰ J. J. Thomson. *Rays of Positive Electricity and their Application to Chemical Analyses*, 2nd ed., Longmans, Green & Co., London (New York, Bombay, Calcutta) 1921, p. 31. Una scansione completa del libro è reperibile all'indirizzo: https://ia601407.us.archive.org/35/items/raysofpositiveeel00thomuoft/raysofpositiveeel00thomuoft_bw.pdf



<https://www.flickr.com/photos/22942507@N08/7724228578>
(foto: Edoardo Baraldi)

Il TG1 nazionale della RAI, il giorno 11 febbraio 2016, ha aperto il suo notiziario con il titolo clamoroso: "RIVELATE ONDE GRAVITAZIONALI!" e immediatamente dopo, a seguire: "BORSE IN CADUTA LIBERA!". Qualche telespettatore avrà colto il nesso di equivalenza che sottendeva i due eventi catastrofici? L'involontaria allusione al principio di equivalenza? Senz'altro il riferimento è alla versione *strong* del principio, visto che si applica, come dimostrato, anche ai sistemi finanziari.