

Il pendolo semplice

Semplice, ma non troppo

(Pervenuto il 22.4.2016, approvato il 14.10.2016)

ABSTRACT

You can measure both the period and the amplitude of a simple pendulum “on the fly”, i.e. while it is swinging and slowing down. This was implemented years ago using a photogate connected to the serial port of a personal computer (which made the time measurements). The idea has now been tested again using a low-cost optical sensor and an Arduino card.

Quest'anno ricorre il decimo anniversario della scomparsa di Giulio Corini, morto nel 2006 alla fine di maggio. Socio dell'AIF per tanti anni, fondatore del Laboratorio di Didattica delle Scienze dell'Università di Roma “La Sapienza”, Giulio ha lasciato innumerevoli idee e contributi per la didattica della Fisica. In questo articolo ho voluto riprendere un suo suggerimento, riproponendolo per un sistema oggi facilmente disponibile, basato su una scheda ‘Arduino’.

1. Il periodo delle “piccole oscillazioni”

Il periodo T di un pendolo semplice, per *piccole oscillazioni*, è notoriamente dato dall'espressione:

$$T \cong T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \quad (1)$$

(dove L è la lunghezza del pendolo e g l'accelerazione di gravità).

Piccole oscillazioni, ma piccole quanto?

Come si sa, all'espressione scritta sopra si perviene usualmente facendo un'approssimazione sulla legge della forza F :¹

$$F = -mg \sin(\vartheta) \cong -mg\vartheta$$

e, di conseguenza, può apparire che l'approssimazione con la quale si ottiene il periodo usando la prima espressione sia la stessa con la quale si può ritenere che $\sin(\vartheta) \cong \vartheta$. In realtà le cose vanno un po' meglio. Si supponga di calcolare T con una espressione più accurata [1], nella quale entri anche la dipendenza dall'ampiezza Θ dell'oscillazione, e di valutare i due rapporti percentuali:

$$\varepsilon_\vartheta = 100 \frac{\Theta - \sin(\Theta)}{\sin(\Theta)}$$

e

$$\varepsilon_T = 100 \frac{T(\Theta) - T_0}{T(\Theta)}.$$

Facendolo, si scopre che il primo raggiunge il valore dell'1% quando Θ vale circa 14° mentre il secondo rapporto percentuale raggiunge l'1% a circa 23° . Ancora: a 45° confondere l'arco col seno costa una variazione dell'11% circa – ma l'espressione approssimata del periodo differisce soltanto del 3,7% dal valore più corretto.

Da queste valutazioni e tenendo conto delle incertezze usualmente associate alle misure svolte manualmente nei laboratori delle scuole, si capisce che – quasi sempre – le oscillazioni considerate sono *piccole* abbastanza. Se, però, il periodo è misurato con un fototraguardo e un sistema di cronometraccio elettronico, è difficile non accorgersi della sua dipendenza dall'ampiezza del moto.

2. Più precisi sul periodo

Il periodo del pendolo semplice può essere ricavato con maggiore precisione evitando di assumere l'approssimazione del moto armonico. Tuttavia l'espressione "esatta" alla quale si perviene contiene un integrale ellittico e non può essere integrata altro che con metodi numerici (o esprimendola in forma di serie) [1-3].

Allo scopo di ottenere una valutazione di T più accurata di quella fornita da T_0 , senza però ricorrere esplicitamente alla teoria degli integrali ellittici, è possibile considerare direttamente l'espressione (attribuita a D. Bernoulli²):

$$T = T_0 \left(1 + \frac{\Theta^2}{16} \right) \quad (2)$$

che – in sostanza – contiene soltanto il primo termine in Θ dello sviluppo in serie al quale si è accennato sopra, oppure una delle altre formule approssimate proposte da vari autori [5-7], tra cui la seguente:

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{\cos\left(\frac{\Theta}{2}\right)}} \quad (3)$$

che può anche essere ricavata in modo elementare.^{3,4}

3. Misura contemporanea di periodo e ampiezza

Misurare il periodo del pendolo al variare dell'ampiezza può essere assai brogos, a meno di seguire il metodo indiretto suggerito da G. Cortini molti anni fa [10-14]. Si assume, naturalmente, di poter fare le misure di tempo con l'ausilio di un fototraguardo collegato a un *data-logger* (o a un computer opportunamente programmato o, come vedremo subito, a un sistema basato su *Arduino*).

Il fototraguardo s deve essere inizialmente collocato, a distanza L_s dal punto di sospensione del pendolo, in modo che intercetti l'oscillazione al passaggio dalla posizione centrale; ci si può accertare del corretto posizionamento verificando che il sistema misuri intervalli eguali tra gli oscuramenti successivi quando il pendolo oscilla con ampiezza molto piccola. Partendo da questa posizione centrata (Figura 1), il sensore deve essere spostato, nel piano del moto, di un piccolo tratto orizzontale d misurato accuratamente: in questo modo le misure di tempo forniranno, per ogni oscillazione, due intervalli diversi, uno un poco più breve del successivo. Se si indica con τ il più breve dei due intervalli e con T il tempo della corrispondente oscillazione completa (il periodo per l'ampiezza

corrente di oscillazione), ponendo $\alpha = \arctan(d/L_s)$ si dimostra (Appendice 1) che l'ampiezza di oscillazione Θ è data da:

$$\Theta = \frac{\alpha}{\cos\left(\pi \frac{\tau}{T}\right)}. \quad (4)$$

Perciò, in corrispondenza a ciascuna coppia di tempi misurati τ e $\tau' = T - \tau$, si potranno calcolare i valori corrispondenti del periodo T e dell'ampiezza Θ .⁵

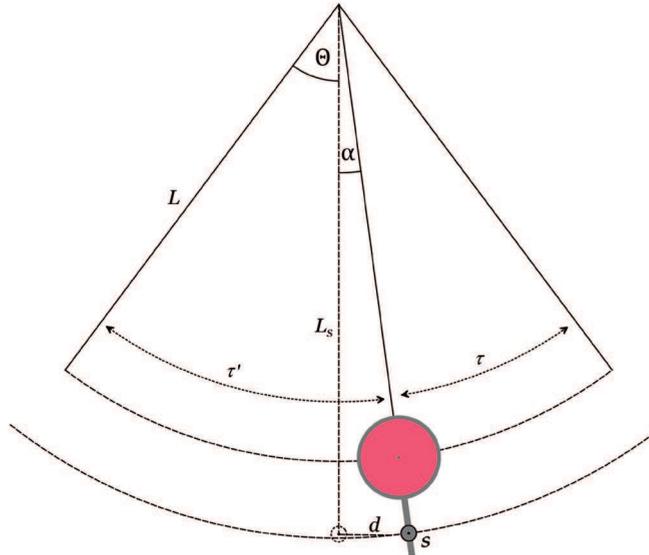


Figura 1. Schema dell'oscillazione del pendolo e delle grandezze da misurare per determinarne l'ampiezza Θ .

Nella figura sono indicati con τ e τ' gli intervalli di tempo impiegati dal pendolo nel percorrere, avanti e indietro, gli archi segnati; d è lo spostamento del sensore ottico s dalla posizione centrale iniziale, situata a distanza L_s dal punto di sospensione del pendolo.

4. Qualche misura preliminare

È stato realizzato un pendolo con una pallina di gomma; dopo aver praticato un foro assiale, nella pallina è stato infilato un ago per lana (di alluminio) recante un anello di nylon come cruna – la punta dell'ago è stata segata, in modo da realizzare un prolungamento cilindrico (diametro 3,25 mm, lunghezza 26 mm) uscente dalla pallina⁶.

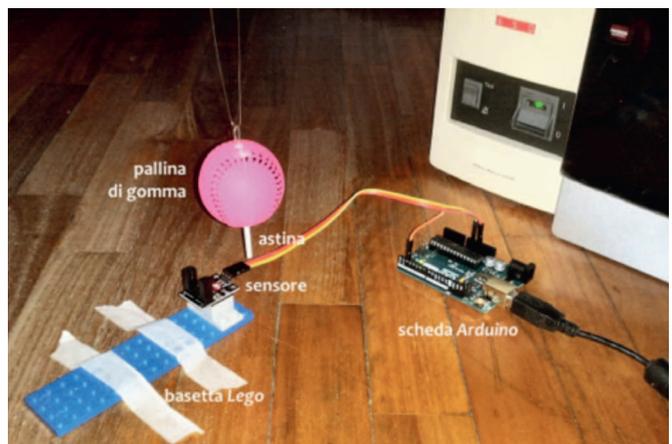
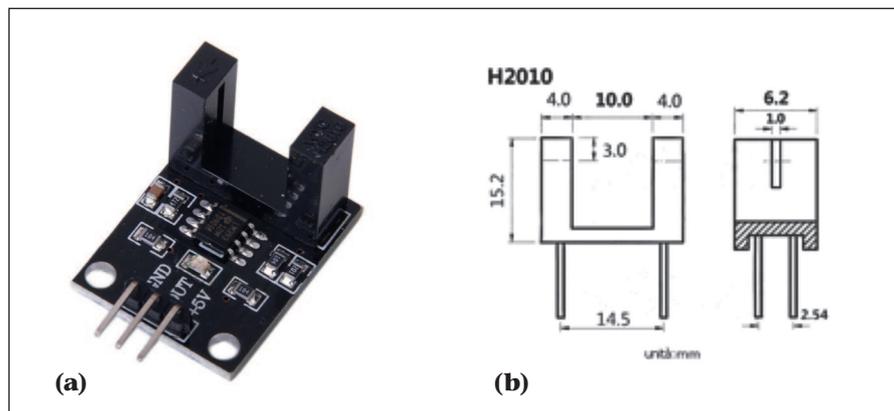


Figura 2. Foto del pendolo, del sensore e della scheda Arduino.

L'astina, durante l'oscillazione del pendolo, intercetta il fascio di un sensore IR a forcella, largo 10 mm e alto 12 mm, montato su un piccolo modulo per *Arduino* (Figura 3a).⁷ Il modulo si può collegare facilmente alla scheda *Arduino* con tre fili conduttori, senza effettuare saldature; nel nostro caso, è stato anche fissato con nastro doppio-adesivo a un supporto, costruito con alcuni pezzi di *Legò*.⁸

Figura 3a. Modulo fototraguardo. Si notano il sensore a forcella e il connettore a tre contatti per il collegamento con la scheda *Arduino*.

Figura 3b. Dimensioni del sensore H2010; l'emettitore IR e il fototransistor distano 3,0 mm dalla sommità del contenitore.



Con questo pendolo, sospeso bifilarmente a un sostegno poggiato al bordo di un tavolo (con un filo di nylon di diametro 0,35 mm, trattenuto da due pinzette), sono state realizzate alcune misure di periodo, senza modificare la lunghezza della sospensione, ma lasciando spontaneamente diminuire l'ampiezza del moto.

Il sistema *Arduino* usato⁹ consente una risoluzione temporale migliore di $10 \mu\text{s}$ ¹⁰; il programma di acquisizione registra i valori al microsecondo ma, ovviamente, l'ultima cifra non è da considerarsi attendibile¹¹.

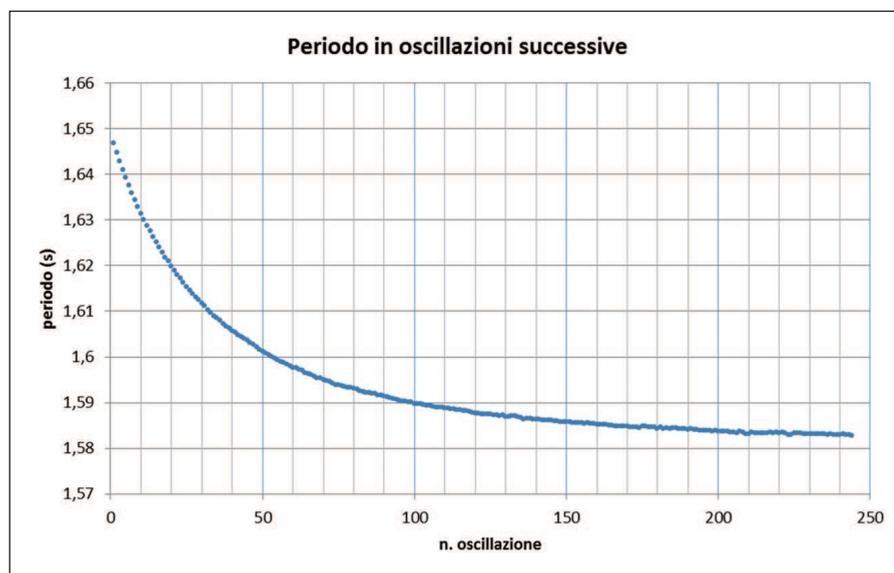


Figura 4. Misure preliminari: variazione del periodo in oscillazioni successive.

Il diagramma mostra che il periodo diminuisce apprezzabilmente al diminuire dell'ampiezza di oscillazione (che in questa prova variava da un valore iniziale dell'ordine di 45° fino a circa 6° o 7°).

5. Una presa dati, a confronto con i valori teorici

Come si è detto sopra, per poter determinare l'ampiezza di oscillazione con il metodo di Cortini bisogna misurare la distanza L_s tra la sospensione del pendolo e il sensore del fototraguardo, quando quest'ultimo è posto centralmente. Come si è controllato con un calibro, l'emettitore IR e il fototransistor si affacciano da una fenditura verticale a una distanza $d_0 = 3,0$ mm dalla sommità del contenitore (Figura 3b). Perciò è stata misurata la distanza tra la quota di sospensione del pendolo e la sommità del sensore, aggiungendo poi il valore d_0 ora descritto.

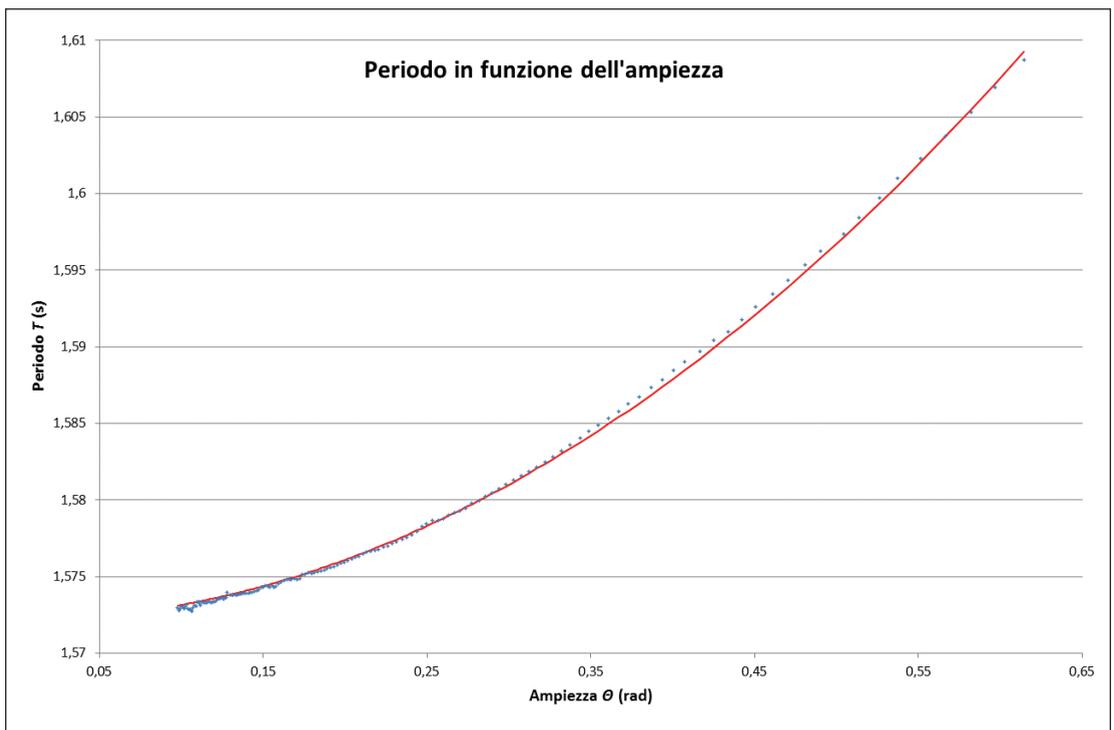
Il "passo" dei bottoncini *Lego* è di 8,0 mm e questo è il valore assunto a priori per lo spostamento d .

Per la lunghezza L del pendolo, si è misurata la distanza tra la quota di sospensione e la sommità della pallina, aggiungendo poi il raggio della pallina. Per tener conto anche del tratto sporgente dell'astina d'alluminio, al risultato così ottenuto è stato ulteriormente aggiunto il valore di 0,6 mm.

Nel grafico più sotto sono riportati i valori di periodo rilevati in funzione delle ampiezze (determinate come descritto sopra), in una delle prove fatte nelle condizioni seguenti:

Figura 5. Periodo del pendolo in funzione dell'ampiezza di oscillazione.

L (cm)	L_s (cm)	d (mm)	α (rad)
$61,4 \pm 0,2$	$65,4 \pm 0,1$	$8,0 \pm 0,5$	$0,012 \pm 0,001$



Oltre ai punti sperimentali, è rappresentata una curva continua che corrisponde ai valori di $T(\Theta)$ calcolati con l'espressione (2) riportata sopra. Tuttavia il calcolo è stato effettuato ponendo $d = 7,55$ mm anziché $d = 8,0$ mm; in questo modo si ottiene una corrispondenza molto buona tra i dati sperimentali e la curva, mentre la curva sovrastimerebbe i valori del periodo se calcolata con $d = 8,0$ mm (soprattutto per i valori Θ di più alti, dove la sovrastima risulta di circa 5 ms, piccola in assoluto, ma comunque ben visibile nel grafico).

In effetti, il valore di d è molto critico e non è facile da misurare. Come detto, bisogna sistemare il sensore in posizione centrale, così che i tempi τ e τ' risultino eguali, e poi spostarlo di un tratto misurato con la precisione del decimo di millimetro. Provando, si è visto che, se si muove direttamente la basetta *Leggo* che regge il sensore, non si riesce a realizzare la centratura con precisione migliore di quella che porta i due tempi τ e τ' a coincidere entro il centesimo di secondo. Inoltre è quasi inevitabile muovere un poco anche la basetta quando si sposta il sensore alla fila successiva di bottoncini.

Per un risultato migliore, servirebbe un traslatore a vite – un dispositivo professionale, però, esce dall'ambito dei costi ridotti ipotizzati per questo esperimento¹².

Infine, non è escluso che vi possa essere un piccolo effetto sistematico, da ricondurre a qualche asimmetria nel fascio del sensore, che viene oscurato in condizioni diverse nella posizione centrale e in quella traslata.

In ogni caso il risultato ottenuto nella prova riportata sopra fa capire che il sistema è complessivamente idoneo allo scopo: permette di mostrare bene la variazione del periodo con l'ampiezza di oscillazione per confrontarla con quanto previsto dalle formule approssimate che la descrivono.

6. A scuola

Si riporta qualche esperienza personale dell'autore.

In passato, 1993, la rilevazione del periodo (usando un fototraguardo, preso dal corredo di una rotaia ad aria e interfacciato con un personal computer tramite una porta seriale) è stata presentata a una classe prima di Istituto Tecnico Industriale, con il solo scopo di verificare che il periodo varia con l'ampiezza dell'oscillazione. Si usava il programma descritto in [12]; non si voleva determinare il valore dell'ampiezza e ci si limitava a discutere un grafico simile a quello di Figura 3.

Anni dopo, 2004, in una classe terza di Liceo Scientifico Tecnologico, è stata condotta la misura indiretta dell'ampiezza con la tecnica qui descritta, usando un altro programma che sfruttava anche la grafica migliorata dei PC allora disponibili. In questo secondo caso, agli studenti è stata data l'espressione (2), senza dimostrazione; è stato poi assegnato il compito di elaborare a casa i dati raccolti a scuola, limitatamente a valori scelti ogni 5° , e di confrontarli con quelli previsti dalla relazione indicata.

Senza introdurre formule approssimate, quali per esempio la (2) o la (3), si possono usare i valori di T e Θ per apprezzare direttamente i limiti di validità della legge (1) "delle piccole oscillazioni". Questo è stato fatto in un'altra classe terza di Liceo Scientifico Tecnologico, un anno dopo la precedente.

In tutti i tre casi i risultati didattici sono stati convincenti, ma i computer attuali non sono più dotati di porte seriali e, in pratica, l'interfaccia e i programmi sviluppati per quel tipo di collegamento non sono più utilizzabili.

L'apparato qui descritto permette ora di riproporre quelle prove ed è di semplice realizzazione e basso costo; oltre a consentire misure di buona precisione con il pendolo, si presta ad essere usato per esperimenti diversi, per esempio in unione a una *smart-pulley* o con una barriera ottica a strisce opache.

Si lascia al lettore, tuttavia, la valutazione su come sfruttare queste opportunità nelle proprie classi: come detto, l'apparato è economico e versatile, ma bisogna considerare che le esperienze qui dette sono state realizzate in situazioni didattiche ora non più praticabili (con un orario di cinque ore settimanali, sia nell'ITI precedente al 1994/95 che nel Liceo Scientifico Tecnologico). La proposta didattica originale del progetto T.I.D. [12] prevedeva un percorso di studio articolato in più fasi, per un totale di circa nove ore; d'altro canto una presa dati con il sistema *Arduino* può essere tranquillamente impostata e conclusa in un'ora di attività se svolta dal docente (in due ore se realizzata dagli studenti a gruppi). Tra questi estremi si potranno delineare varie scelte, sia per sottolineare aspetti relativi alla misura elettronica a confronto con il cronometraggio manuale, sia – più specificamente – per discutere del moto del pendolo e dei modelli relativi.

APPENDICE 1

Dimostrazione

Ammettiamo che il moto del pendolo abbia, inizialmente, ampiezza Θ e che lo smorzamento sia debole, trascurabile durante una singola oscillazione. Ammettendo dunque che l'equazione oraria possa essere descritta con l'approssimazione di moto armonico, esprimiamo l'angolo ϑ formato dal filo di sospensione con la verticale come:

$$\vartheta(t) = \Theta \cos(\omega t) = \Theta \cos\left(2\pi \frac{t}{T}\right)$$

dove abbiamo indicato con ω la pulsazione e con T il periodo dell'oscillazione (e abbiamo posto $\vartheta(0) = \Theta$).

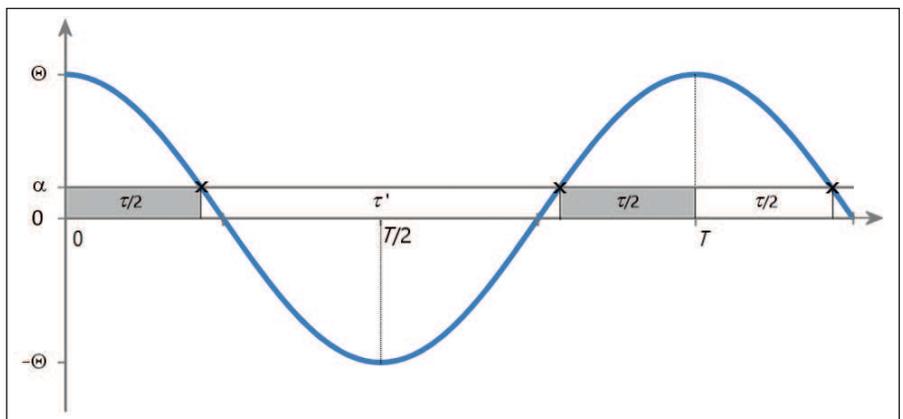


Figura 6. Elongazione del moto del pendolo in funzione del tempo, $\vartheta(t) = \Theta \cos \omega t$ (unità arbitrarie su entrambi gli assi).

Le crocette indicano i punti successivi in cui il pendolo intercetta il fascio del sensore ottico, in corrispondenza all'elongazione α . I rettangoli a sfondo grigio e bianco non hanno significato fisico, servono soltanto per contrassegnare più chiaramente gli intervalli di tempo.

Facciamo ora riferimento alla Figura 1 del testo e al diagramma della Figura 6 qui sopra e consideriamo un'oscillazione che parta da destra (Figura 1), cioè dalla posizione iniziale $\vartheta(0) = \Theta$. Dopo un primo intervallo di tempo $\tau/2$ l'astina del pendolo intercetterà una prima volta il fascio del fototraguardo s . Successivamente, l'oscillazione porterà il pendolo all'estremo sinistro del moto e poi indietro, fino a intercettare nuovamente il fototraguardo: i due passaggi saranno separati da un intervallo di tempo τ . Poi il pendolo continuerà a muoversi verso destra, ancora per un tempo $\tau/2$, tornando alla posizione di partenza e infine, dopo aver invertito il verso del movimento, intercetterà il fototraguardo per la terza volta. Tra il secondo e il terzo passaggio sarà trascorso un intervallo di tempo $\tau = \tau/2 + \tau/2$. Il sistema di misura avrà registrato i due diversi tempi τ e τ' , la cui somma fornisce il periodo T .

Poiché $\tau/2$ è il tempo nel quale l'elongazione $\vartheta(t)$ del pendolo passa dal valore iniziale Θ al valore α ,¹³ sostituendo $\tau/2$ al posto di t e α al posto di $\vartheta(t)$ nell'espressione scritta sopra possiamo ricavare l'ampiezza Θ :

$$\Theta = \frac{\alpha}{\cos\left(\pi \frac{\tau}{T}\right)}.$$

A questo punto ci basta riconoscere che l'angolo α può essere espresso come $\alpha = \arctan(d/L_s)$ per ottenere l'espressione desiderata:

$$\Theta = \frac{\arctan(d/L_s)}{\cos\left(\pi \frac{\tau}{T}\right)}.$$

APPENDICE 2

Il programma per le misure

La struttura dei programmi (detti *sketch*) scritti per *Arduino* è basata su due funzioni fondamentali, `setup()` e `loop()`.

La funzione `setup()` serve per stabilire le impostazioni iniziali e viene eseguita una sola volta dopo l'accensione o il reset della scheda. La funzione `loop()` contiene il programma principale e, come dice il nome, è eseguita a ciclo continuo.

Possono essere presenti altre funzioni, richiamate dall'interno delle due già citate oppure eseguite in associazione a un *interrupt* generato da qualche dispositivo. Nel nostro caso – come già abbiamo accennato – quando il fototraguardo passa da luce a ombra o viceversa, la tensione presente su uno dei piedini della scheda cambia conseguentemente e il sistema è programmato (nella routine iniziale) per generare, appunto, un *interrupt*. Ciò significa che ad ogni cambiamento del sensore il flusso del programma viene interrotto per eseguire una routine specifica; questa routine, che abbiamo denominato `photogateEvent()`, si occupa di memorizzare lo stato del fototraguardo (luce/ombra) e l'istante nel quale è avvenuta la transizione.

Il tempo è segnato dall'orologio interno e la lettura avviene con la funzione di sistema `micros()`, che restituisce in microsecondi il tempo trascorso dall'avvio del programma. Secondo quanto descritto nel manuale del sistema, la risoluzione del conteggio è di $4 \mu\text{s}$ e il contatore si satura (tornando a zero) dopo circa 70 min – tempo più che sufficiente per le misure qui proposte.

I valori registrati sono man mano trasmessi al computer, al quale la scheda è collegata con un cavo USB, e si possono leggere in un'apposita finestra, detta *monitor seriale*, dalla quale possono essere copiati per elaborazioni successive.

La trasmissione dei dati è programmata all'interno della funzione `loop()` che sorveglia anche lo stato di un altro piedino della scheda, il quale può essere collegato a massa tramite un pulsante (non presente nella foto di Figura 2). La pressione del pulsante permette di cambiare il modo operativo.

In effetti sono previste tre modalità di presentazione: la modalità *Bandierina* calcola e visualizza il tempo trascorso tra un oscuramento e il successivo illuminamento; la modalità *Ruota* calcola e visualizza il tempo trascorso tra oscuramenti successivi; la modalità *Pendolo* calcola e visualizza gli intervalli tra un oscuramento e il secondo oscuramento successivo a quello.

Il programma, comunque, trasmette tutti i tempi degli eventi successivi (ed è direttamente su questi dati che abbiamo basato le nostre elaborazioni).

Il programma completo può essere scaricato all'indirizzo:
<https://bit.ly/fototraguardo>

Qui di seguito, a titolo esemplificativo, una riproduzione di quanto si può trarre dal monitor seriale in seguito all'avvio di una misura in modalità *Ruota* (sono riportati soltanto i primi rilevamenti).

```

Timer Arduino per fototraguardo

Scegliere la modalità di funzionamento:
1) Bandierina
2) Ruota
3) Pendolo

Avvio >>> Modo Ruota

```

Evento #	Luce --	Tempo (s)	dTempo (s)	Start --	Stop --
0	0	3.789184	0.000000	1	0
1	1	3.811140	0.021956	0	0
2	0	4.574480	0.785296	1	1
3	1	4.596460	0.021980	0	0
4	0	5.369020	0.794540	1	1
5	1	5.390844	0.021824	0	0
6	0	6.154416	0.785396	1	1
7	1	6.176516	0.022100	0	0
8	0	6.948924	0.794508	1	1
9	1	6.971020	0.022096	0	0
10	0	7.734128	0.785204	1	1

Tabella I – Alcune misure visualizzate dal monitor seriale. Si notino le coppie di valori τ e τ' (in secondi, nella colonna dTempo): 0,785296 e 0,794540; 0,785396 e 0,794508; (0,785204 ...).

Bibliografia

- [1] KITTEL, C., KNIGHT, W. D., RUDERMAN, M. A. *La Fisica di Berkeley, 1 – Meccanica*. Zanichelli, Bologna 1970, p. 254.
- [2] <http://hep.fi.infn.it/fisichetta1/disp/pendolo.pdf>
- [3] THE CHEMICAL RUBBER CO. C.R.C. *Standard Mathematical Tables*. The Chemical Rubber Co, Cleveland 1964 (XII ed.), p. 257.
- [4] POYNTING, J. H., THOMSON, J. J. A. *Textbook of Physics, vol. I – Properties of Matter*. Griffin, London 1909; <https://archive.org/stream/textbookofphysics01poynuoft#page/n5/mode/2up>
- [5] LIMA, F. M. S., ARUN, P. “An accurate formula for the period of a simple pendulum oscillating beyond the small angle regime”. *Am. J. Phys.* **74** (2006) 892; <http://fy.chalmers.se/~f7xiz/TIF081C/Period.pdf>
- [6] AMRANI, D., PARADIS, P., BEAUDIN, M. “Approximation expressions for the large-angle period of a simple pendulum revisited”. *Rev. Mex. Fis. E* **54/1** (2008) 59; <http://www.scielo.org.mx/pdf/rmfe/v54n1/v54n1a10.pdf>
- [7] KIDD, R. B., FOGG, S. L. “A simple formula for the large-angle pendulum period”, *The Physics Teacher*. **40/2** (2002), 81.
- [8] MILLET, L. E. “The Large-Angle Pendulum Period”, *The Physics Teacher*. **41/3** (2003) 162; http://users.df.uba.ar/sgil/physics_paper_doc/papers_phys/mechan/Pendolo1.pdf
- [9] CARVALHAES, C. G., SUPPES, P. “Approximation for the period of the simple pendulum based on the arithmetic-geometric mean”. *Am. J. Phys.*, **76/12** (2008) 1150; <http://suppes-corpus.stanford.edu/articles/physics/431.pdf>
- [10] CORTINI, G. *Relazione sull'esperienza del pendolo semplice*. Ciclostilato diffuso al XXIV Congresso AIF, La Spezia 1985.
- [11] CORTINI, G., MASULLO, R., SCHACHERL, S. “Nonexponential Pendulum Damping”. *Lettere al Nuovo Cimento*, **44/8A** (1985) 648.
- [12] CORTINI, G., DANUSSO, L., FESTA, P., SCALZO, S. “L'elaboratore on line per analizzare situazioni sperimentali: studio del moto del pendolo”. *Applicazioni dell'elaboratore alla didattica della fisica*, C.N.R. – Progetto strategico T.I.D., Bologna 1988.
- [13] CORTINI, G. “The use of the computer as a laboratory instrument in teaching experimental physics”. *Phys. Educ.*, **27** (1992) 159.
- [14] CORTINI, G., DANUSSO, L., FESTA, P., SCALZO, S. “L'elaboratore in linea per capire alcuni procedimenti della fisica (L'esempio del moto del pendolo)”, in: G. Cortini (a cura di). *Incontrare la scienza. Riflessioni e proposte rivolte agli insegnanti*. La Nuova Italia, Scandicci (FI) 1990, p. 131.
- [15] VIOLINO, P. “Il pendolo, con un certo realismo”. *LFnS*, **25/2** (1992) 206.

Note

¹ Con l'usuale significato dei simboli: m indica la massa del pendolo; g l'accelerazione di gravità; ϑ l'elongazione, cioè l'ampiezza dell'angolo formato tra la direzione verticale e il filo del pendolo.

² L'attribuzione può essere ricondotta a una frase a pag. 10 del manuale di fisica di Poynting e J. J. Thomson [4] dove, però, non è menzionata l'opera nella quale Bernoulli avrebbe ricavato questa espressione.

³ Questa approssimazione, proposta da Kidd e Fogg [7], si può giustificare senza ricorrere all'analisi matematica [8]. Si applica la formula di duplicazione del seno all'espressione della forza: $F = -mg \sin(\vartheta) = -2mg \sin(\vartheta/2) \cos(\vartheta/2)$. Successivamente, si approssimano $\sin(\vartheta/2) \cong \vartheta/2$ e $\cos(\vartheta/2) \cong \cos(\Theta/2)$ e, confrontando l'equazione $mL\ddot{\vartheta} = -mg \cos(\Theta/2)\vartheta$ con la consueta $mL\ddot{\vartheta} = -mg\vartheta$, si arriva subito all'espressione (3).

⁴ Benché poco nota, esiste un'espressione “esatta” del periodo basata sul calcolo della cosiddetta *media aritmo-geometrica* tra i due valori 1 e $\cos(\Theta/2)$. La media può essere calcolata con un algoritmo iterativo a rapida convergenza [9].

⁵ Questa idea è stata sfruttata dallo stesso Cortini per produrre un'unità didattica specifica, a suo tempo sviluppata nell'ambito di un Progetto TID-CNR [12, 14].

⁶ Diametro della pallina: 46 mm; massa totale (con l'astina): 38,15 g.

⁷ Il modulo, siglato LDTR-163865, è stato reperito presso un distributore cinese al costo di qualche euro. Su una piccola scheda (20 mm × 28 mm), sono montati un sensore ottico a forcella, marcato WYC H2010, e un comparatore LM393. Il comparatore è usato per rendere netto il segnale nelle transizioni luce-ombra e ombra-luce.

⁸ Si veda la Figura 2. Il *Lego* è stato scelto per poter ottenere spostamenti predeterminati di passo 8,0 mm (<http://www.robertcailliau.eu/Alphabetical/L/Lego/Dimensions/General%20Considerations/>).

⁹ *Arduino Uno R3*. *Arduino* è una famiglia di piccole schede elettroniche, a basso costo, basate su un microcontrollore RISC (a numero ridotto di istruzioni). La programmazione della scheda è possibile collegandola a un computer tramite una porta USB e si realizza con un semplice ambiente di sviluppo multipiattaforma – Linux, Apple, Windows – disponibile gratuitamente (<https://www.arduino.cc/en/Main/Software>); i programmi sono scritti in una versione semplificata del linguaggio C. All'uso di *Arduino* nel laboratorio di fisica sono state dedicate diverse scuole estive dell'AIF (Genova 2011-2014).

¹⁰ Idealmente $4 \mu\text{s}$ (<http://www.arduino.cc/en/reference/micros>). Per il programma usato, vedi Appendice 2.

¹¹ È però possibile riprogrammare *Arduino*, se necessario, per ottenere una risoluzione di $0,5 \mu\text{s}$ (<http://www.instructables.com/id/How-to-get-an-Arduino-micros-function-with-05us-pr/>).

¹² Una mini morsa per modellismo con regolazione a vite (per esempio la Proxxon Micromot 28132, del costo di circa 15 €) potrebbe forse costituire un'alternativa adeguata.

¹³ Di questa affermazione è possibile dare una dimostrazione più formale ed esplicita, rispetto a quanto si ricava dalla Figura 6.

Sia t_1 l'istante nel quale il pendolo transita per la prima volta davanti al fototraguardo; si avrà: $\Theta \cdot \cos(2\pi t_1/T) = \alpha$. Poiché il coseno è una funzione pari, vale anche: $\Theta \cdot \cos(-2\pi t_1/T) = \alpha$. Per la periodicità della funzione, inoltre, essa assumerà il medesimo valore α negli istanti $t_2 = -t_1 + T$ e $t_3 = t_1 + T$, corrispondenti ai due transiti successivi. Questi, dunque, saranno separati dall'intervallo $\tau = t_3 - t_2 = 2t_1$. Si ha così $t_1 = \tau/2$, come si voleva mostrare.

LA COPERTINA: ANACLETO 25

Nel 2017 i Giochi di Anacleto arrivano al traguardo della 25ma edizione. I Giochi propongono una competizione, nata nel 1993 al seguito delle Olimpiadi della Fisica: a noi del Gruppo Olimpiadi dell'A.I.F. erano allora già evidenti i vantaggi culturali e formativi a disposizione degli studenti che prendevano parte alle gare e si è pensato quindi di offrire anche a chi si trovava appena ai primi passi nello studio della fisica la possibilità di misurare i propri interessi e di approfondire ed ampliare lo studio. La prova sperimentale "Anacleto in Laboratorio" è venuta quattro anni dopo, complemento secondo noi necessario per un'attività a cui partecipano studenti che, nella massima parte, frequentano i primi due anni della scuola secondaria di secondo grado. Da allora i Giochi di Anacleto si sdoppiano in due prove: "Anacleto in Laboratorio" e "Domande e Risposte", quest'ultima con quesiti a risposta chiusa sulla fisica e su abilità connesse con lo studio della fisica. Dal 1997 i materiali dei Giochi sono proposti ed elaborati da un Gruppo di Lavoro costituito da sei – otto soci dell'A.I.F. Per celebrare l'anniversario del 2017 ci ripromettiamo di pubblicare entro l'anno un fascicolo con i problemi sperimentali di Anacleto in Laboratorio assegnati dal 1997

al 2006. Seguirà la pubblicazione dei quesiti delle prime dieci edizioni di "Domande e Risposte". Dal 2012 l'A.I.F. promuove la partecipazione italiana alle Olimpiadi Europee delle Discipline Scientifiche (EUSO, *European Union Science Olympiad*, <http://www.euso.it/>): una competizione rivolta a ragazze e ragazzi con meno di 17 anni. In EUSO i concorrenti lavorano in gruppo dividendosi i compiti e collaborando per affrontare problemi sperimentali nei campi della Biologia, della Chimica e della Fisica. EUSO è apparsa subito un'ottima risposta per quei concorrenti dei Giochi di Anacleto che chiedono di poter fare di più: e il Gufetto Anacleto si è fatto in tre.



Giochi di

**A
n
a
c
l
e
t
o**

Giuliana Cavaggioni
coordinatrice del gruppo "Giochi di Anacleto ed EUSO"

NDR: Ricordiamo inoltre che, con la conclusione dell'edizione 2016, le Olimpiadi Italiane della Fisica hanno compiuto 30 anni (<http://www.olifis.it/index.php/informazioni/30-anni>).