

Silvano Sgrignoli
Sezione AIF Bergamo
sisgri@gmail.com

Approfondimenti

Ma questo siagli perdonato

L'articolo *Conclusioni false, e di agevolissima confutazione* considera il pendolo "interrotto", del quale Galileo tratta nei suoi *Discorsi*¹, e mette in luce un comportamento discorde da quanto atteso nel caso in cui il chiodo sia posto in F (si veda la figura 1, ripresa dal lavoro di Galileo).

Nell'ipotetico esperimento effettuato in classe, infatti, la pallina, anziché descrivere l'arco BI , «abbandonò l'arco di circonferenza prima di raggiungere il punto I e proseguì il moto lungo un arco di parabola fino a tendere nuovamente il filo, fermandosi in B dopo qualche oscillazione».

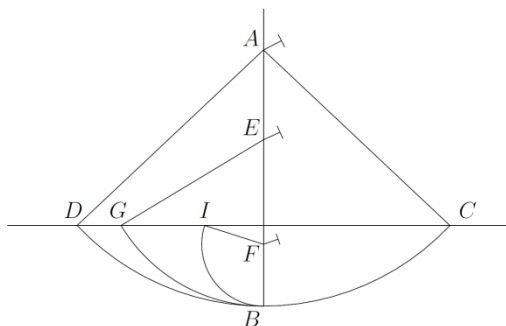


Figura 1. Il "pendolo interrotto" di Galileo.

Dunque, Galileo potrebbe aver preso un "abbaglio" o essere incorso in una piccola "svista"?

Per esaminare meglio la questione, partiamo dal testo originale:

Figuratevi, questo foglio essere una parete eretta all'orizzonte, e da un chiodo fitto in essa pendere una palla di piombo d'un'oncia o due, sospesa dal sottil filo AB, lungo due o tre braccia, perpendicolare all'orizzonte, e nella parete segnate una linea orizzontale DC, segante a squadra il perpendicolo AB, il quale sia lontano dalla parete due dita in circa; trasferendo poi il filo AB con la palla in AC, lasciate essa palla in libertà: la quale primieramente vedrete scendere descrivendo l'arco CBD, e di tanto trapassare il termine B, che, scorrendo per l'arco BD, sormonterà sino quasi alla segnata parallela CD, restando di pervenirvi per piccolissimo intervallo, togligli il precisamente arrivarvi dall'impedimento dell'aria e del filo; dal che possiamo veracemente concludere, che l'impeto acquistato nel punto B dalla palla, nello scendere per l'arco CB, fu tanto, che bastò a risospingersi per un simile arco BD alla medesima altezza. Fatta e più volte reiterata cotale esperienza, voglio che ficchiamo nella parete, rasente al perpendicolo AB, un chiodo, come

Nota

¹ G. Galilei. *Discorsi e Dimostrazioni Matematiche, intorno a due nuove scienze Attenenti alla Meccanica & i Movimenti Locali*, Leida 1638, p. 167.

in E o vero in F, che sporga in fuori cinque o sei dita, e questo acciò che il filo AC, tornando, come prima, a riportar la palla C per l'arco CB, giunta che ella sia in B, intoppando il filo nel chiodo E, sia costretta a camminare per la circonferenza BG, descritta intorno al centro E; dal che vedremo quello che potrà far quel medesimo impeto che, dianzi, concepito nel medesimo termine B, sospinse l'istesso mobile per l'arco BD all'altezza della orizzontale CD. Ora, Signori, voi vedrete con gusto condursi la palla all'orizzontale nel punto G, e l'istesso accadere se l'intoppo si mettesse più basso, come in F, dove la palla descriverebbe l'arco BI, terminando sempre la sua salita precisamente nella linea CD; e quando l'intoppo del chiodo fusse tanto basso che l'avanzo del filo sotto di lui non arrivasse all'altezza di CD (il che accaderebbe quando fusse più vicino al punto B che al segmento dell'AB con l'orizzontale CD), allora il filo cavalcherebbe il chiodo e se gli avvolgerebbe intorno.

Si vede come Galileo distingua due situazioni per il pendolo interrotto: 1) la palla, dopo che il filo si è “intoppato” nel chiodo, percorre un arco di circonferenza fino al livello di partenza (“toltogli il precisamente arrivarvi dall'impedimento dell'aria e del filo”) – ciò avviene sia quando il chiodo è posto in E sopra C, che quando è posto in F sotto C; 2) quando, però, il chiodo è posto troppo in basso (“quando fusse più vicino al punto B che al segmento dell'AB con l'orizzontale CD”), il filo si avvolge attorno al chiodo.

L'articolo *Conclusioni false* considera il caso in cui chiodo è posto sotto C. L'analisi condotta conferma che, in questa situazione, la palla non può raggiungere la quota di partenza su una traiettoria circolare. Viceversa, da un certo punto in poi, il filo cessa di essere teso e la traiettoria diviene parabolica.

(Il secondo caso di Galileo – quando il chiodo è molto in basso e il filo gli si avvolge attorno – non è analizzato.)

Va bene: quando il chiodo sta un po' sotto alla quota di rilascio della sfera, quest'ultima non può tornare alla quota di partenza seguendo una traiettoria circolare per tutto il percorso di risalita, ma... a quale quota arriva? Perché il punto chiave sul quale sembra insistere Galileo è che la sfera termini “sempre la sua salita precisamente nella linea CD”.

Se si fanno i conti, si arriva a questa espressione per la quota massima raggiunta h_T :

$$h_T = h_I \left(1 - \frac{4}{27} \frac{h_I^2}{r^2} \right). \quad (a)$$

Su questa espressione di h_T torneremo in seguito; ora vogliamo stabilire quando si realizza la condizione nella quale il filo si avvolge attorno al chiodo.

Si capisce facilmente che ciò avviene se la sfera raggiunge la quota sopra il chiodo con velocità v_r tale che:

Per dimostrarlo, possiamo riprendere l'espressione (12) dell'articolo *Conclusioni false* (e riferiamoci, anche, alla sua figura 2):

$$h_K = \frac{2}{3} h_I \quad (12)$$

Ne viene che, quando la sfera raggiunge il livello K dove il filo cessa di essere teso, essa ha una velocità di valore:

$$v_K = \sqrt{\frac{2}{3} g h_I}$$

Questa velocità, diretta tangenzialmente alla circonferenza, ha componente orizzontale v_x :

$$v_x = v_K \sin(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{3} g h_I} \cdot \frac{2}{3} \frac{h_I}{r}$$

Perciò l'energia cinetica residua al culmine T della traiettoria parabolica (quando si annulla la componente verticale della velocità) vale:

$$K_T = \frac{1}{2} m v_x^2 = \frac{1}{2} m \frac{4}{9} \frac{h_I^2}{r^2} \frac{2}{3} g h_I$$

Questo corrisponde a un'energia potenziale:

$$U_T = m g h_T = m g h_I - K_T = m g h_I \left(1 - \frac{4}{27} \frac{h_I^2}{r^2} \right)$$

In definitiva, la quota massima raggiunta risulta essere:

$$h_T = h_I \left(1 - \frac{4}{27} \frac{h_I^2}{r^2} \right)$$

(Allo stesso risultato si arriva anche calcolando l'altezza di un tiro parabolico, tramite l'espressione $\frac{v_K^2 \cos^2(\alpha)}{2g}$ e sommando a questa l'altezza di partenza h_K .)

$$\frac{v_r^2}{r} \geq g.$$

Posto $v_r^2 = 2g(h_I - r)$, ricaviamo facilmente la condizione:

$$h_I \geq \frac{3}{2}r.$$

Questo significa che, perché il filo possa avvolgersi attorno al chiodo, bisogna sollevare la palla sopra di esso di almeno 1,5 volte il raggio – altrimenti il moto ha, comunque, un tratto di traiettoria parabolica, anche se il chiodo è posto molto in basso.

Ma significa anche che nella relazione (a) dobbiamo considerare $h_I < \frac{3}{2}r$, altrimenti ci ritroveremmo nella situazione in cui il filo si avvolge attorno al chiodo. Questo limite corrisponde a una quota massima raggiunta $h_T = \frac{2}{3}h_I = h_K$, ovvero la palla raggiunge la quota massima proprio quando la tensione del filo si annulla.

In definitiva, dobbiamo studiare la relazione (a) al variare di h_I tra i valori estremi 0 (il punto C è allo stesso livello del chiodo) e $3r/2$.

Per rendere più semplice e diretta l'analisi, rappresentiamo graficamente $y_K = h_K/r$ e $y_T = h_T/r$ in funzione di $x = h_I/r$ (limitatamente all'intervallo tra 0 e 1,5). Nel grafico è segnata anche la retta $y_I = x$, che corrisponde al caso ipoteticamente descritto da Galileo, cioè $h_T = h_I$.

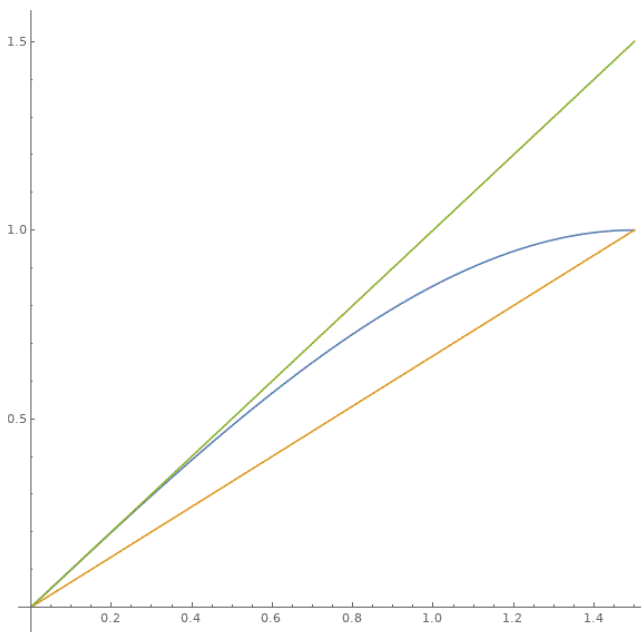


Figura 2: In arancione y_K , in blu y_T , in verde y_I .

Se si confronta il grafico della quota raggiunta (blu) con quello della quota di partenza (verde), si nota che fino a circa $h_I/r = 0,4$ le due curve sono praticamente sovrapposte. La differenza diviene poi sempre più marcata al crescere di h_I/r .

Ma nel caso di Galileo? È difficile dire se la figura stampata nei *Discorsi* sia semplicemente indicativa o si possano ritenere verosimili le proporzioni. Galileo parla di un filo lungo “due o tre braccia”² e quindi, in qualche modo, fa riferimento a un oggetto concreto. Sulla sua figura si può misurare un rapporto $h_I/r \approx 1/3$, valore che ricade decisamente entro l’intervallo in cui le curve blu e verde sono praticamente indistinguibili. Se si calcola il valore del rapporto $(h_I - h_T)/h_I$ si trova circa 1,6%. Ciò significa che, con un filo lungo 1 m, la differenza di quota $h_I - h_T$ è di poco più di 1 mm.

Insomma, per il punto *F* disegnato nella figura vi è certamente un tratto di traiettoria parabolico, ma la quota finale raggiunta è insensibilmente diversa dalla quota di partenza – dunque c’è un errore in quanto affermato da Galileo, ma forse possiamo concedere che “questo siagli perdonato”³.

Un selfie da Marte

Questo autoritratto del rover *Curiosity Mars* lo immortalava sul *Vera Rubin Ridge* con alle spalle il Monte *Sharp*.

Curiosity è atterrato su Marte nel 2012 per studiare questa montagna che permette l’accesso agli strati geologici del pianeta formati nel corso di milioni di anni in presenza di acqua, probabilmente a causa di uno o più laghi che si trovavano alla base della montagna.

Sotto altri cieli: chiedete agli studenti di ipotizzare qualitativamente l’ora del giorno marziano in cui è stato scattato il *selfie*.



Credits: NASA / JPL-Caltech / MSSS

Ulteriori informazioni su *Curiosity* sono *online* su www.nasa.gov e mars.jpl.nasa.gov.

Sulla fisica dei colori del cielo si veda il poster presentato al Congresso AIF di Lucca nel 2017 reperibile *online* all’indirizzo www.researchgate.net/publication/346096882_Tutti_i_colori_del_cielo

Vera Montalbano

Note

² Un braccio corrisponde, probabilmente, a 55 cm.

³ *Dialogo*, Firenze 1632, pag. 227.