

Questa rubrica si propone di stimolare la riflessione sul tipo di conoscenza prodotta dalla fisica e di porre in evidenza termini e concetti che costituiscono punti nodali per l'apprendimento della disciplina. L'approccio storico-critico, così come quello didattico, non hanno alcuna pretesa di essere esaustivi.

I quanti di luce: da un'ipotesi euristica a elementi della realtà fisica - II parte ⁽¹⁾.

1. Introduzione

A partire dal 1920, apparve una serie di lavori che, nonostante alcuni contenuti innovativi, non sembra abbiano destato particolare interesse tra i contemporanei. Ciò fu verosimilmente dovuto al fatto che l'ipotesi dei quanti di luce non era ancora stata ben assimilata dalla comunità scientifica; inoltre, alcuni di questi lavori contenevano trattazioni che prestavano il fianco a varie critiche (peraltro non rese esplicite). Il risultato fu che il lavoro più originale (Schrödinger, 1922) non solo fu ignorato dai contemporanei ma fu dimenticato dalla comunità scientifica. Complessivamente, il triennio 1920-1922 ha costituito, per quanto riguarda i quanti di luce, una vivace fase di transizione in cui si sono mescolate creatività, errori e risultati fondamentali (anche se ignorati). In questo triennio è stata superata la separazione tra relatività ristretta e ipotesi quantiche, separazione sistematicamente adottata da Einstein; si è cercata una statistica dei quanti di luce; è emersa l'idea di considerare i quanti di luce come particelle materiali dotandoli di una massa inerziale ed una quantità di moto angolare.

I semi sparsi in questo triennio daranno, negli anni immediatamente successivi, frutti inaspettati. Di essi ci occuperemo nella terza parte di questa voce.

2. Atomi in moto: quanti di luce e relatività

Nel 1921, Karl Fösterling mescola relatività ristretta e quanti di luce allo scopo di ricavare la formula dell'effetto Doppler cosiddetto "trasversale": la sorgente è costituita da un atomo in moto e la direzione del quanto di luce emesso è perpendicolare alla direzione di moto dell'atomo [2]. Se l'energia a riposo di un atomo eccitato è E_0 ,

⁽¹⁾ La prima parte è stata pubblicata in [1].

la sua energia in un sistema di riferimento che vede l'atomo in moto con velocità v è data da

$$(1) \quad E = \frac{E_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Ne segue che

$$(2) \quad \Delta E = \frac{\Delta E_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

dove abbiamo indicato con ΔE_0 e ΔE , rispettivamente, l'energia di eccitazione dell'atomo nel sistema di riferimento che vede l'atomo in quiete ed in quello che lo vede in moto con velocità v ⁽²⁾ Se *supponiamo* che la relazione (2) valga anche per l'energia dei quanti di luce emessi si ricava che

$$(3) \quad \nu = \frac{\nu_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Questa formula è sbagliata. Fösterling, in realtà, pur sviluppando un calcolo analogo a quello mostrato sopra, scrive la formula corretta:

$$(4) \quad \nu = \nu_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

La spiegazione risiede nel fatto che, durante il calcolo, Fösterling inverte la relazione (2), pervenendo così al risultato corretto.

È opportuno sottolineare che nel procedimento sviluppato da Fösterling ci sono due errori: lo scambio già citato tra le energie che compaiono nella (2) e l'ipotesi che questa relazione valga anche per l'energia dei quanti di luce emessi. Come vedremo più avanti, questa ipotesi non è corretta, perché Fösterling trascura il fatto che nel processo di emissione (e di assorbimento) deve essere conservata anche la quantità di moto ⁽³⁾. In ogni caso, Fösterling, per la prima volta, mescola quanti di luce e relatività. Einstein, come è noto, aveva sempre tenuto separati i due argomenti. A questo proposito è nota l'opinione di Pais: “Credo che la ragione per cui Einstein tenne la teoria quantistica separata dalla relatività sia perché egli considerava la prima come

⁽²⁾ Come si vedrà in sezione 5, se si pone $\Delta E = E_1 - E_2$, dove E_1 ed E_2 sono le energie a riposo dell'atomo prima e dopo l'emissione, ΔE , risulta essere un invariante perché data dalla differenza tra due varianti. L'eq. (2) è quindi sbagliata. Gli errori successivi sono “necessari” per ovviare all'errore iniziale.

⁽³⁾ Fösterling tratta anche il caso di un atomo in quiete in un campo gravitazionale il cui potenziale sia ϕ e, usando la relazione tra massa ed energia scrive la relazione corretta $E_g = E_0(1 + \phi/c^2)$.

provvisoria mentre, dall'altra parte, la relatività gli appariva come la verità rivelata ([3], p. 909)."

3. Radiazione elettromagnetica senza onde

Nel 1921 compare un lungo e complesso lavoro di Robert Emden ⁽⁴⁾ dedicato alla termodinamica dei quanti di luce [5] ⁽⁵⁾. Scrive Emden:

I fenomeni ottici non possono più essere ricondotti ad un fondamentale punto di vista: la teoria ondulatoria, una volta onnipotente, cade in molti campi che possono essere trattati completamente e semplicemente con l'ipotesi dei quanti di luce. Ciononostante, dal punto di vista della teoria ondulatoria, i quanti di luce sono considerati, per così dire, come un'ipotesi transitoria, destinata, prima o poi, a scomparire. Il disaccordo che emerge dalla contrapposizione dei due punti di vista, può essere evitato usando coerentemente la teoria che fornisce la trattazione più semplice dei fenomeni studiati. Pertanto, nel seguito, le leggi della radiazione termica saranno trattate sulla base dei quanti di luce, senza alcuna reminiscenza della teoria ondulatoria: questa, nella nostra trattazione non deve esistere ([5], p. 513).

L'idea di trattare la radiazione termica di una cavità isoterma in termini di quanti di luce non era nuova: era stata usata per la prima volta da Einstein nel 1905 [9]. Nuova era invece la scelta di mettere da parte "ogni reminiscenza della teoria ondulatoria". Il lavoro tratta nove argomenti che possono essere suddivisi in due classi: la prima caratterizzata dall'uso corretto delle proprietà dei quanti di luce (pressione della radiazione, effetto Doppler); l'altra, caratterizzata dall'applicazione della termodinamica fenomenologica ai quanti di luce considerati come particelle materiali dotati di una massa "inerziale" pari a ε/c^2 dove ε è l'energia del quanto ⁽⁶⁾. Uno spunto interessante della parte termodinamica del lavoro è costituito dall'idea di associare una quantità di moto angolare ai quanti di luce. Emden sviluppa un modello "meccanico" del quanto di luce, supposto di forma anulare: cerca quindi di associare le rotazioni

⁽⁴⁾ Notizie biografiche di Robert Emden si trovano in [4]. In questa voce biografica si legge che "Emden fu il primo a fornire una derivazione dell'equilibrio radiativo di particelle non distinguibili, cioè la statistica dei fotoni. Pertanto, egli fu un precursore nell'uso della statistica di Bose-Einstein ([4], p. 361)". In effetti, Emden cerca di sviluppare la derivazione che gli viene attribuita, ma i risultati ottenuti sono lungi dall'essere soddisfacenti.

⁽⁵⁾ Questo lavoro è stato citato da Jammer [6], Mehra e Rechenberg [7] e discusso da Darrigol [8]. A mio giudizio, Mehra e Rechenberg ([7], p. 586) attribuiscono impropriamente a Emden l'uso dell'idea di "molecole di luce". Darrigol ([8], p. 256) mostra invece come Emden abbia impropriamente usato le formule di calcolo combinatorio di Boltzmann.

⁽⁶⁾ Secondo Emden, la massa a riposo dei quanti è nulla, perché essi si propagano alla velocità della luce. In realtà, la massa "inerziale" che Emden associa ai quanti deriva dalla relazione tra massa a riposo ed energia a riposo di una particella materiale. Come vedremo nella terza parte di questa voce, l'idea di associare una massa non nulla ai quanti di luce verrà ripresa in modo più sofisticato da Louis de Broglie. de Broglie tratterà i quanti di luce come particelle materiali dotate di una massa a riposo "piccolissima" e scriverà, $h\nu = (1/\sqrt{1 - v^2/c^2})m_0c^2$ [10].

di questo anello alle proprietà di polarizzazione delle onde luminose ⁽⁷⁾. Complessivamente, il lavoro di Emden è interessante per il tentativo di descrivere le proprietà della luce in termini di quanti di luce; da questo tentativo emergono, per la rilevanza concettuale e il possibile uso didattico, le trattazioni della pressione della radiazione e dell'effetto Doppler ⁽⁸⁾.

3.1. Pressione della radiazione

Emden considera un cilindro di lunghezza l ed area della base A contenente n_ε quanti di luce, di energia ε per unità di volume, che si propagano lungo l'asse del cilindro. Se le superfici del cilindro sono perfettamente riflettenti, ad ogni urto su una base del cilindro di un quanto di luce, il quanto trasferisce al cilindro una quantità di moto $2\varepsilon/c$. Ne segue che, in un secondo (essendo pari a $c/2l$ il numero di urti per secondo di un quanto su una base) la quantità di moto trasferita ad una base del cilindro sarà

$$(5) \quad \frac{dP_\varepsilon}{dt} = n_\varepsilon A l \frac{2\varepsilon}{c} \frac{c}{2l} = n_\varepsilon \varepsilon A.$$

Quindi la pressione p esercitata dai quanti di energia ε su una base del cilindro sarà data da ⁽⁹⁾

$$(6) \quad p_\varepsilon = \frac{F_\varepsilon}{A} = \frac{dP_\varepsilon}{dt} \frac{1}{A} = n_\varepsilon \varepsilon = u_\varepsilon$$

Se i quanti di luce contenuti nel cilindro si muovono in tutte le direzioni, la pressione su una base del cilindro sarà ridotta ad un terzo ⁽¹⁰⁾. Emden osserva infine che “siccome il cilindro non può essere messo in moto da forze interne, questa relazione ($p_\varepsilon = u_\varepsilon/3$) è valida non solo nel caso di perfetta specularità, ma anche per qualunque struttura arbitraria della superficie”; e che “la pressione totale della radiazione si ottiene per somma di tutte le pressioni parziali p_ε .”

La relazione $p = u/3$, dove u è l'energia per unità di volume della radiazione di corpo nero, era stata ricavata da Boltzmann nel 1884 in un lavoro in cui si deduce, teoricamente, la cosiddetta legge di Stefan-Boltzmann che fornisce la potenza irraggiata per unità di superficie da un corpo nero: $P = \sigma T^4$ con $\sigma = 5.6704 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$ (valore attuale). La deduzione di Boltzmann, basata sulla termodinamica e l'elettromagnetismo maxwelliano, non era in grado di ricavare l'espressione di σ . Tale

⁽⁷⁾ Emden, in un inciso, sottolinea come la quantità di moto angolare posseduta dal quanto di luce sia uguale a quella persa dalla particella che ha generato il quanto.

⁽⁸⁾ Nelle prossime due sezioni, tratteremo questi argomenti. Useremo simboli diversi da quelli di Emden; presenteremo inoltre la sue trattazioni in modo diverso senza però modificarne la base concettuale.

⁽⁹⁾ Il risultato ottenuto da Emden differisce da quello solitamente riprodotto nei manuali: $p = 2u$. La differenza è dovuta al fatto che nei manuali si considera un'onda piana che proviene da distanza infinita e che viene riflessa da una superficie incidendo perpendicolarmente su di essa.

⁽¹⁰⁾ Emden non esegue il calcolo ma afferma che, in questo caso, è come se $1/3$ dei quanti viaggiassero lungo l'asse del cilindro.

espressione si ottiene invece usando la legge della radiazione di corpo nero di Planck: $\sigma = 2\pi^5 k_B^4 / 15h^3 c^2$.

3.2. Effetto Doppler. $h\nu/c$

La derivazione della formula dell'effetto Doppler svolta da Emden può essere presentata nel modo seguente. Con un precisazione importante: data la rilevanza concettuale e didattica, tratteremo il caso generale e non, come fatto da Emden, quello in cui la velocità coinvolta è piccola rispetto a quella della luce; useremo inoltre due figure non presenti nell'articolo originale.

Si consideri un fascio di quanti di luce di energia $\varepsilon = h\nu$ che si propagano lungo la direzione negativa dell'asse x (fig. 1).

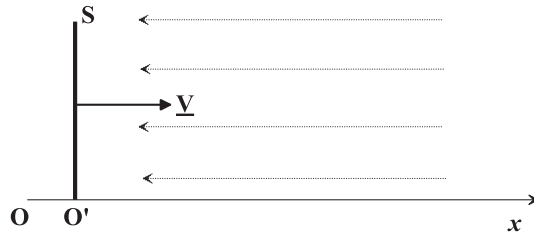


Fig. 1. – La superficie S è colpita da quanti di luce, di energia $h\nu$ nel sistema di riferimento O , che viaggiano lungo la direzione negativa dell'asse x . La superficie S , completamente assorbente, è, dapprima in quiete nel sistema di riferimento O e poi in moto, al generico istante t , con velocità V , rispetto ad O , lungo la direzione positiva dell'asse x .

Sia S una superficie completamente assorbente in quiete nel sistema di riferimento O . La variazione della quantità di moto P_x per unità di tempo della superficie S , dovuta all'assorbimento dei quanti di luce, è data da

$$\frac{dP_x}{dt} = -n \frac{h\nu}{c} cS = F_x,$$

dove n è la densità dei quanti e F_x è la forza che la radiazione esercita sulla superficie S . Siccome $|F_x| = pS$ dove p è la pressione esercitata dalla radiazione sulla superficie, l'equazione precedente si può scrivere sotto la forma

$$p = nh\nu.$$

Si supponga ora che la superficie S si muova lungo la direzione positiva dell'asse x con velocità V ⁽¹¹⁾. Allora

$$(7) \quad p = nh\nu \left(1 + \frac{V}{c} \right).$$

⁽¹¹⁾ Si noti che l'assorbimento dei quanti da parte della superficie S comporta che essa si muova di moto uniformemente accelerato (con accelerazione negativa). Pertanto, nelle formule che seguono, la velocità V varia da istante a istante. Le formule della relatività ristretta si possono applicare in questo caso considerando O' come il sistema di riferimento *istantaneamente* co-movente con la superficie S .

In un sistema di riferimento comovente con la superficie vale la relazione

$$(8) \quad p' = n' h \nu' .$$

Per le trasformazioni di Lorentz e l'equazione di trasformazione della componente x della forza:

$$(9) \quad \begin{aligned} S &= S' , \\ F_x &= F'_x , \end{aligned}$$

quindi

$$p' = \frac{|F'_x|}{S'} = \frac{|F_x|}{S} = p .$$

Essendo

$$n' = n \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} ,$$

la (8) diventa

$$p = n h \nu' \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} .$$

Infine, uguagliando i secondi membri di questa equazione e della (7), si ottiene

$$(10) \quad \nu = \nu' \frac{\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + V/c} .$$

Questa è la formula dell'effetto Doppler nel caso in cui i quanti di luce viaggino parallelamente alla direzione del moto relativo dei due osservatori: nel caso studiato, la superficie S si allontana dall'osservatore O . Nel caso in cui la superficie S si avvicinasse ad O , nella eq. (10) apparirebbe, al denominatore, il segno $(-)$ invece del segno $(+)$. Quindi, in generale, si avrebbe

$$(11) \quad \nu = \nu' \frac{\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 \pm V/c} ,$$

dove il segno $(+)$ vale nel caso in cui la superficie si allontana, mentre il segno $(-)$ vale nel caso in cui la superficie si avvicina.

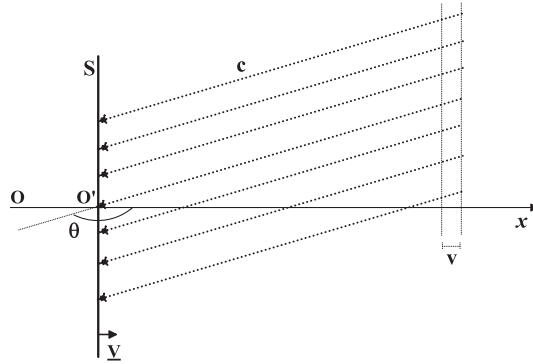


Fig. 2. – Un fascio di quanti di luce, di energia $h\nu$ nel sistema di riferimento O , incide sulla superficie completamente assorbente S ; θ è l'angolo formato dalla direzione di propagazione dei quanti con l'asse x . Si veda anche la didascalia della fig. 1.

È interessante, a questo punto, trattare anche il caso in cui il fascio di quanti di luce incida sulla superficie S formando un angolo θ con la direzione positiva dell'asse x (fig. 2), caso non studiato da Emden. Nel sistema di riferimento O si ha

$$F_x = \frac{dP_x}{dt} = n \frac{h\nu}{c} S (c \cos \theta - V) .$$

Nel sistema di riferimento comovente con la superficie

$$F'_x = \frac{dP'}{dt'} = n' \frac{h\nu'}{c} (cS') \cos \theta' .$$

Per le (9) e per la relazione che intercorre tra i coseni degli angoli θ e θ' :

$$\cos \theta' = \frac{\cos \theta - B}{1 - B \cos \theta} ,$$

si ottiene

$$\nu = \nu' \frac{\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 - (V/c) \cos \theta} ,$$

che è la formula generale dell'effetto Doppler.

4. Einstein: onde o particelle?

Nel 1921 comparve un lavoro di Einstein riguardante la possibilità di un esperimento che possa distinguere tra la descrizione ondulatoria e quella corpuscolare della luce [11]. Secondo Einstein, le predizioni delle due descrizioni, ondulatoria e corpuscolare, sono in contraddizione se si effettua un opportuno esperimento ottico: si potrebbe quindi stabilire quale delle due descrizioni è corretta (oppure, nessuna delle due). L'idea di questo lavoro si basa su una ipotesi riguardante i quanti di luce emessi da atomi (o ioni) in moto che, come vedremo, è sbagliata; pertanto, non discuteremo i

dettagli di questo esperimento. Il lettore interessato può consultare direttamente il lavoro di Einstein, nonché la ricostruzione storica di Martin Klein ([12], pp. 8-13); una discussione più sintetica si trova in ([7], pp. 516-517).

Einstein inizia ricordando che se ν_0 è la frequenza emessa da un atomo in quiete, allora la frequenza ν emessa da un atomo in moto con velocità v è data da ($v \ll c$)

$$(12) \quad \nu = \nu_0 \left(1 + \frac{v}{c} \cos \theta \right)$$

dove θ è l'angolo tra la direzione della radiazione e la direzione della velocità dell'atomo nel sistema di riferimento dell'apparato di misura. Secondo Einstein, la (12) è tipica della teoria ondulatoria. A questo punto, Einstein scrive:

Se, d'altra parte, consideriamo la condizione di Bohr, fondamentale per la teoria dei quanti,

$$(13) \quad E_2 - E_1 = h\nu_1$$

che connette la variazione dell'energia dell'atomo con la frequenza emessa, siamo propensi ad attribuire una singola frequenza ad ogni processo elementare di emissione *anche quando l'atomo è in moto* ⁽¹²⁾.

Quindi, secondo Einstein, le predizioni contraddittorie delle due teorie, relative all'esperimento proposto, derivano dalle due ipotesi di partenza diverse: la (12) per la teoria ondulatoria e la (13) per quella corpuscolare. Abbiamo invece visto come una trattazione corpuscolare alla Emden conduca, per quanto riguarda l'effetto Doppler, alle medesime formule che si ottengono con la trattazione ondulatoria. Pertanto le due descrizioni, se correttamente sviluppate, conducono, per l'esperimento ideato da Einstein, alle stesse predizioni.

Einstein aveva sviluppato la teoria della relatività ristretta e avanzato l'ipotesi dei quanti di luce dotandoli di energia e quantità di moto: sorprende quindi vederlo trascurare quest'ultima loro proprietà proprio nel contesto in cui essa svolge un ruolo essenziale. L'anno seguente, infatti, Schrödinger mostrerà come l'emissione di un quanto di luce da parte di un atomo in moto sia un fenomeno di dinamica relativistica regolato dalle leggi di conservazione dell'energia e della quantità di moto (sezione 5). Evidentemente, in quegli anni, i quanti di luce non erano entità facilmente trattabili ⁽¹³⁾.

⁽¹²⁾ Il corsivo è nostro.

⁽¹³⁾ Interessante il commento di Klein ([12], p. 9): "Alla fine del suo breve articolo, Einstein sottolineò che, sebbene la frequenza del singolo processo elementare di emissione fosse indipendente dalla direzione, ciò non era in contraddizione con l'esistenza dell'effetto Doppler. Debbo confessare che non capisco questo commento. È vero che non era ancora stato dimostrato che l'effetto Doppler è valido anche sulla base della teoria quantica; ma Schrödinger avrebbe subito dopo fornito questa derivazione [13]. Si veda anche [21]. Siccome l'eq. (12) sarebbe valida per entrambe le teorie, ondulatoria e quantica, l'effetto previsto da Einstein, se esistente, non avrebbe potuto distinguere tra di esse. Sembra che sia come se Einstein non avesse capito la questione (It seems as though Einstein missed this point) e, per quanto ne so, nessun altro ha mai commentato questo punto." Mehra e Rechenberg, circa un decennio dopo, scrivono: "Poco dopo divenne evidente che l'esperimento

Le difficoltà connesse all'uso dei quanti di luce sono ulteriormente illustrate dalla discussione tra Einstein e Ehrenfest che seguì la pubblicazione del lavoro di Einstein. Infatti, il dibattito tra i due fisici non ha riguardato le due ipotesi fondamentali sopra ricordate bensì il fatto che, secondo Ehrenfest, la propagazione di un'onda luminosa in un mezzo dispersivo doveva essere svolta usando pacchetti d'onda e non onde piane. Einstein riconobbe che Ehrenfest aveva ragione e, in un nuovo articolo, mostrò che una trattazione basata su pacchetti d'onda eliminava l'effetto previsto dalla teoria ondulatoria ma non da quella corpuscolare basata sulla eq. (13). Pertanto, la verifica sperimentale fatta da Geiger e Bothe dopo il primo lavoro di Einstein e che aveva mostrato che l'effetto previsto dalla teoria ondulatoria non esisteva, risultò, a questo punto, irrilevante al fine di discriminare la teoria ondulatoria da quella corpuscolare: entrambe ora, secondo Einstein, prevedevano lo stesso effetto nullo.

5. Schrödinger: effetto Doppler. $h\nu$ e $h\nu/c$

Nel 1922, Erwin Schrödinger pubblicò un lavoro in cui l'emissione di un quanto di luce (dotato di energia $h\nu$ e quantità di moto $h\nu/c$) da parte di un atomo in moto rispetto all'apparato di misura (spettroscopio) era trattata come un problema di dinamica relativistica, applicando i principi di conservazione dell'energia e della quantità di moto [13].

Scriva Schrödinger:

Ora Försterling ha già cercato di giungere al principio di Doppler applicando la condizione delle frequenze di Bohr in un sistema di riferimento nel quale il baricentro della molecola abbia una velocità di traslazione. Il risultato era poco incoraggiante. Risultava infatti soltanto l'effetto Doppler trasversale, ovvero, altrimenti detto, solo la nota piccola correzione relativistica al valore classico dell'effetto Doppler. In proposito W. Pauli jun. ha detto nella sua recensione (Physik. Ber. 2, 489, 1921): "Va tuttavia osservato che la formula di trasformazione per l'energia emessa usata dall'autore è giusta solo quando... complessivamente non venga emesso alcun impulso lineare". Ma questo non è vero in nessun sistema di riferimento; piuttosto, sulla base data da Einstein alla teoria della radiazione [14], il quanto emesso $h\nu$ porta con sé sempre — e in particolare in ogni sistema di riferimento — l'impulso lineare $h\nu/c$, il massimo che in linea di principio possa essere associato a questo ammontare di energia. Nel seguito dimostriamo che il "salto di velocità" prodotto in tal modo per la condizione delle frequenze di Bohr dà proprio lo spostamento Doppler, e con tutte le sottigliezze che sono richieste dalla teoria della relatività ([13], trad. it. p. 1).

cruciale proposto da Einstein non sarebbe stato in grado di decidere tra la teoria ondulatoria e quella dei quanti di luce sulla base di un'altra considerazione. Erwin Schrödinger..." ([7], pp. 517-518). Poi gli autori citano, e discutono brevemente, il lavoro di Schrödinger [13].

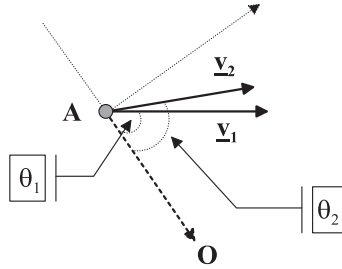


Fig. 3. – Emissione di un quanto di luce da parte di un atomo A . Il quanto di luce è emesso lungo la direzione $A \rightarrow O$: O rappresenta la fenditura d'ingresso dello spettroscopio. Si veda il testo.

Schrödinger mette subito in evidenza il ruolo centrale della quantità di moto del quanto di luce, completamente trascurato invece, come abbiamo visto, da Einstein. Finalmente, i quanti di luce entrano in gioco con tutte le loro proprietà (allora note) ⁽¹⁴⁾. Con riferimento alla fig. 3 (non usata da Schrödinger), le equazioni di conservazione assumono la forma ⁽¹⁵⁾

$$(14) \quad h\nu = \gamma_1 E_1 - \gamma_2 E_2,$$

$$(15) \quad \gamma_1 \frac{E_1}{c^2} v_1 \cos \theta_1 = \gamma_2 \frac{E_2}{c^2} v_2 \cos \theta_2 + \frac{h\nu}{c},$$

$$(16) \quad \gamma_1 \frac{E_1}{c^2} v_1 \sin \theta_1 = \gamma_2 \frac{E_2}{c^2} v_2 \sin \theta_2,$$

dove

- E_1, E_2 è l'energia a riposo dell'atomo prima e dopo l'emissione;
- $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ è la velocità dell'atomo prima e dopo l'emissione;
- θ_1, θ_2 è l'angolo che la velocità dell'atomo forma con la direzione di propagazione del quanto di luce prima e dopo l'emissione.

Si noti che le velocità, gli angoli e la direzione di propagazione del quanto sono valutati nel sistema di riferimento dell'apparato di misura e che la geometria del processo è planare. Sviluppando integralmente la trattazione di Schrödinger si perviene alla relazione

$$(17) \quad \nu = \nu_0 \frac{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}}{1 - (v_1/c) \cos \theta_1}$$

⁽¹⁴⁾ Verso la fine degli anni Venti del secolo scorso, si associò ai quanti di luce anche un momento angolare $\hbar$ in modo tale da poter rappresentare quelle che nella teoria ondulatoria costituiscono le proprietà di polarizzazione di un'onda luminosa [15, 16]. Tuttavia, questa ulteriore proprietà dei quanti di luce non toglie validità alla trattazione di Schrödinger perché questa è basata solo sulla conservazione dell'energia e della quantità di moto.

⁽¹⁵⁾ A rigore, nella trattazione che segue, le grandezze tipiche di un'onda non dovrebbero comparire (nel nostro caso, la frequenza). Manteniamo tuttavia la notazione usata da Schrödinger in cui compare esplicitamente la frequenza.

con

$$(18) \quad \nu_0 = \frac{\Delta E}{h} \left(1 - \frac{\Delta E}{2E_1} \right),$$

ν è la frequenza misurata dallo spettroscopio; $\vec{v}_1$ la velocità dell'atomo prima dell'emissione; θ_1 l'angolo formato da $\vec{v}_1$ con la direzione di emissione del quanto di luce; ν_0 la frequenza misurata dallo spettroscopio se l'atomo è in quiete prima dell'emissione; $\Delta E = E_1 - E_2$ la differenza tra le energie degli stati quantici coinvolti nella transizione. Siccome ΔE è definita come la differenza tra 2 invarianti (l'energia a riposo prima e dopo l'emissione) essa è un invariante. Si osservi come, in base alla (18), l'energia del quanto di luce misurata dallo spettroscopio quando l'atomo emettente è in quiete prima dell'emissione non sia uguale a ΔE , ma sia ridotta del termine $\Delta E^2/2E_1$ che rappresenta l'energia di rinculo dell'atomo.

Nel caso dell'assorbimento di un quanto di luce da parte di un atomo, le equazioni di partenza sono

$$h\nu = \gamma_2 E_2 - \gamma_1 E_1$$

e

$$\begin{aligned} \gamma_1 \frac{E_1}{c^2} v_1 \cos \theta_1 + \frac{h\nu}{c} &= \gamma_2 \frac{E_2}{c^2} v_2 \cos \theta_2, \\ \gamma_1 \frac{E_1}{c^2} v_1 \sin \theta_1 &= \gamma_2 \frac{E_2}{c^2} v_2 \sin \theta_2, \end{aligned}$$

dove, al solito, $\gamma_i = 1/\sqrt{1 - v_i^2/c^2}$, $i = 1, 2$. La relazione finale è

$$\nu = \nu_0 \frac{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}}{1 - (v_1/c) \cos \theta_1}$$

identica alla (17) dove, questa volta, però

$$(19) \quad \nu_0 = \frac{\Delta E}{h} \left(1 + \frac{\Delta E}{2E_1} \right).$$

Nel caso dell'assorbimento $h\nu_0$ rappresenta l'energia che un quanto di luce deve avere per essere assorbito da un atomo la cui velocità iniziale (prima dell'assorbimento) è nulla. Si noti infine che la grandezza E_1 ha valori diversi nel caso dell'emissione e dell'assorbimento. Nel caso dell'emissione, E_1 è l'energia a riposo dell'atomo eccitato; nel caso dell'assorbimento, E_1 è l'energia a riposo dell'atomo non eccitato.

Secondo la trattazione svolta, *l'effetto Doppler per i quanti di luce è una conseguenza della discretezza e della direzionalità del processo di emissione e di assorbimento da parte di un atomo e delle leggi di conservazione della dinamica relativistica*. In particolare, nel processo di emissione, all'energia acquisita (persa) dal quanto di luce — rispetto all'energia quantica ΔE — corrisponde un'eguale diminuzione (aumento) dell'energia cinetica dell'atomo; nel processo di assorbimento, l'atomo può assorbire un quanto di luce con energia minore (maggiore) di quella corrispondente

al salto quantico ΔE , purché esso perda (acquisti) una corrispondente quantità di energia cinetica.

Quale relazione sussiste tra l'effetto Doppler per i quanti di luce e quello per la luce descritta come un'onda elettromagnetica? Se si tratta la luce come un'onda, l'equazione che descrive l'effetto Doppler coincide con la (17) che, tuttavia deve essere interpretata in modo diverso. Infatti, nella derivazione della (17) per le onde, lo stato fisico della sorgente non è preso in considerazione. Pertanto, la (17) per le onde è interpretata nel modo seguente: se nel sistema di riferimento in cui la sorgente è in quiete la frequenza dell'onda è ν_0 , allora, nel sistema di riferimento che vede la sorgente in moto con velocità $\vec{v}_1$, la frequenza dell'onda è data dalla (17). Inoltre, la descrizione ondulatoria descrive correttamente i fenomeni osservati quando il numero dei quanti di luce che giungono al rivelatore è statisticamente significativo. Quindi, le predizioni della teoria ondulatoria possono essere verificate solo usando rivelatori che accumulano i “segnali” dovuti ai singoli quanti di luce; rivelatori di questo tipo sono, per esempio, le lastre fotografiche o i rivelatori che trasformano l'energia della luce in una corrente elettrica. La descrizione ondulatoria potrebbe invece risultare in disaccordo con gli esperimenti nel caso in cui il rivelatore sia costituito da una singola particella (atomo o nucleo), oppure quando i quanti di luce sono usati uno alla volta ⁽¹⁶⁾.

Per quanto concerne il primo punto, è evidente che la descrizione ondulatoria non è in grado di descrivere lo scambio di energia ed impulso tra un atomo/nucleo ed il quanto emesso/assorbito. D'altra parte, il recente esperimento di interferenza condotto in modo tale che, tra sorgente e rivelatore, sia in volo solo un fotone alla volta [17] mostra la correttezza della parte finale della precedente conclusione. In questo esperimento, la luce si deposita sul rivelatore, costituito da un sensore *CCD* di una fotocamera, in modo discreto, dando origine a singoli punti luminosi. Solo quando il numero di questi punti diventa statisticamente significativo, appaiono le frange di interferenza: a questo punto, anche la descrizione ondulatoria rende conto dei fenomeni osservati. Questo esperimento è stato ampiamente discusso in ([18], pp. 88-90).

Nell'articolo, Schrödinger si ferma ad una equazione in cui compaiono, simmetricamente, le velocità v_1, v_2 dell'atomo prima e dopo l'emissione:

$$(20) \quad \nu = \nu^* \frac{1}{\sqrt{\gamma_1 [1 - (v_1/c) \cos \theta_1] \times \gamma_2 [1 - (v_2/c) \cos \theta_2]}} ,$$

dove

$$(21) \quad \nu^* = \frac{E_1^2 - E_2^2}{2h\sqrt{E_1 E_2}} .$$

La (20) sembra indicare che la frequenza osservata dipende dalle velocità dell'atomo

⁽¹⁶⁾ Vale la pena ricordare un passaggio dell'introduzione del primo articolo di Einstein sui quanti di luce: “... nonostante gli esperimenti abbiano pienamente confermato la teoria della diffrazione, della riflessione, della rifrazione, della dispersione e così via, è concepibile che una teoria della luce basata su funzioni spaziali continue porti a contraddizioni con l'esperienza se la si applica ai fenomeni della generazione e della trasformazione della luce ([9], trad. it. pp. 118-119).”

prima e dopo l'emissione. Ciò non è ragionevole perché, fissata la velocità iniziale dell'atomo, la sua velocità finale dipenderà soltanto dal processo di emissione del quanto di luce e quindi dallo scambio di energia e quantità di moto tra atomo e quanto di luce. Tenendo conto di questo e ponendo $E_1 - E_2 = \Delta E$, si perviene, con pochi passaggi, alle (17) e (18). Ovviamente, Schrödinger era ben consapevole della relazione intercorrente tra velocità iniziale e finale dell'atomo: questa relazione è usata nei calcoli che conducono alla (20); ciò rende ancora più strano il fatto che Schrödinger si sia fermato a questa equazione. Il fatto che Schrödinger si sia fermato alla (20), congiuntamente alla ancora diffusa diffidenza nei confronti dei quanti di luce ha verosimilmente favorito la dimenticanza del lavoro. Quando, poco dopo, Compton [19] e Debye [20] usarono equazioni di conservazione dell'energia e della quantità di moto analoghe a quelle usate da Schrödinger per spiegare il cosiddetto effetto Compton, essi non lo citarono. In un lavoro di Enrico Fermi del 1932, l'effetto Doppler è trattato all'interno della teoria quantica della radiazione [21]. Tuttavia, nella parte introduttiva, Fermi sviluppa un calcolo simile a quello svolto da Schrödinger all'inizio del suo lavoro per ricavare la formula dell'effetto Doppler nell'approssimazione non relativistica e nel caso in cui i quanti emessi viaggiano nella stessa direzione (o in direzione opposta) dell'atomo emettente ([21], pp. 105-106): ma Fermi, verosimilmente non conoscendolo, non cita il lavoro di Schrödinger. Un'ulteriore conferma dell'oblio in cui era caduto il contributo di Schrödinger: nel 1938 Davisson pubblica un breve scritto in cui riproduce il calcolo di Schrödinger ignorando completamente il lavoro di chi l'aveva preceduto [22]. Le eq. (18) e (19) si ritrovano oggi in testi abbastanza noti ([23], pp. 401-407), ([24], pp. 197-199): tuttavia, l'origine di queste formule si è persa nel tempo e nessuno cita il lavoro di Schrödinger. La trattazione "alla Schrödinger" non è usata anche quando si tratta di descrivere l'emissione o l'assorbimento di fotoni da parte di atomi o di nuclei: la descrizione ondulatoria della luce ha messo radici così profonde nella nostra eredità culturale da indurci ad usarla in modo improprio. (g.g.)

Bibliografia

- [1] GIULIANI G., "I quanti di luce: da un'ipotesi euristica a elementi della realtà fisica - I parte", *G. Fis.*, **49** (2008) 127-142.
- [2] FÖRSTSTERLING K., "Bohrsches Atommodell und Relativitätstheorie", *Z. Phys.*, **3** (1920) 404-407.
- [3] PAIS A., "Einstein and the quantum theory", *Rev. Mod. Phys.*, **51** (1979) 863-914.
- [4] FLECKENSTEIN J. O., "Emden, Robert" in: *Dictionary of Scientific Biography*, a cura di Gillispie C.C., vol. V (Charles Scribner's Sons, New York) 1972, pp. 360-361.
- [5] EMDEN R., "Über Lichtquanten", *Phys. Zeits.*, **22** (1921) 513-517. Trad. it. in rete alla pagina: <http://fisicavolta.unipv.it/percorsi/pdf/emden.1921.pdf>
- [6] JAMMER M., *The conceptual development of quantum mechanics* (McGraw - Hill, New York) 1966.
- [7] MEHRA J., RECHENBERG H., *The historical development of Quantum theory*, vol. I, Part 2 (Springer - Verlag, New York) 1982.
- [8] DARRIGOL O., "Statistics and combinatorics in early quantum theory, II: Early symptoma of indistinguishability and holism", *Hist. Stud. Phys. Sci.*, **21** (1991) 237-298.
- [9] EINSTEIN A., *Ann. Phys. (Leipzig)*, **17** (1905) 132-148. Trad. it. in: BELLONE E. *Albert Einstein: Opere scelte* (Boringhieri, Torino) 1988, pp. 118-135. In rete alla pagina: <http://www.physik.uni-augsburg.de/annalen/history/Einstein-in-AdP.htm>.

- [10] DE BROGLIE L., "Rayonnement noir et quanta de lumière", *J. Phys. Radium*, **3** (1922) 422-428.
- [11] EINSTEIN A., "Über ein den Elementarprozeß der Lichtemission betreffendes Experiment", *Sitz. Preuss. Akad. Wissen.*, (1921) 882-883. Trad. it. alla pagina:
<http://fisicavolta.unipv.it/percorsi/pdf/einstein1921.pdf>.
- [12] KLEIN M., "The First Phase of the Einstein Dialogue", *Hist. Stud. Phys. Sci.*, **2** (1970) 1-39.
- [13] SCHRÖDINGER E., "Dopplerprinzip und Bohrsche Frequenzbedingung", *Phys. Zeits.*, **23** (1922) 301-303. Trad. it. alla pagina: <http://fisicavolta.unipv.it/antoci/tq.html>.
- [14] EINSTEIN A., "Zur Quantentheorie der Strahlung", *Phys. Zeits.*, **18** (1917) 121-128. Trad. it. alla pagina: <http://fisicavolta.unipv.it/antoci/tq.html>.
- [15] JORDAN P., "Über die Polarisierung der Lichtquanten", *Z. Phys.*, **44** (1927) 292-300. Trad. it. alla pagina: <http://fisicavolta.unipv.it/antoci/tq.html>.
- [16] POKROWSKI S., "Über einen möglichen Zusammenhang zwischen der Planckschen Konstante h und den ponderomotorischen Wirkungen zirkular polarisierter Strahlen", *Z. Phys.*, **57** (1929) 278-282. Trad. it. alla pagina: <http://fisicavolta.unipv.it/antoci/tq.html>.
- [17] JACQUES V. *et al.*, "Single - photon wavefront - splitting interference" *Eur. Phys. J. D*, **35** (2005) 561-565. In rete alla pagina
<http://www.edpsciences.org/articles/epjd/pdf/2005/10/d05194.pdf>.
- [18] GIACOMARRA C., "Luce e materia, onde e particelle: un possibile percorso didattico attraverso i fenomeni di interferenza - I Parte" *G. Fis.*, **50** (2009) 67-96.
- [19] COMPTON A. H., "A quantum theory of the scattering of X-rays by light elements", *Phys. Rev.*, **21** (1923) 483-502.
- [20] DEBYE P., "Zerstreung von Röntgenstrahlen und Quantentheorie", *Phys. Zeits.*, **24** (1924) 161-166.
- [21] FERMI E., "Quantum Theory of Radiation", *Rev. Mod. Phys.*, **4** (1932) 87-132.
- [22] DAVISSON C. J., "The Theory of the Transverse Doppler Effect", *Phys. Rev.*, **54** (1938) 90-91.
- [23] MØLLER C. , *The Theory of Relativity* (Clarendon Press, Oxford) 1972. In rete alla pagina:
<http://www.archive.org/details/theoryofrelativi029229mbp>.
- [24] FRENCH A. P., *Special Relativity* (W. W. Norton & Company, London) 1968.