

Questa rubrica si propone di stimolare la riflessione sul tipo di conoscenza prodotta dalla fisica e di porre in evidenza termini e concetti che costituiscono punti nodali per l'apprendimento della disciplina. L'approccio storico - critico, così come quello didattico, non hanno alcuna pretesa di essere esaustivi.

Tempo, durate e orologi. Nelle descrizioni della fisica il tempo è una variabile — assunta convenzionalmente come positiva — usata per descrivere le variazioni delle grandezze fisiche ⁽¹⁾. Si dice che il “tempo è misurato dagli orologi”. Questa affermazione richiede qualche precisazione. Consideriamo una misura “tipica”: per esempio, la misura, mediante uno spettroscopio, della lunghezza d'onda della radiazione emessa da un vapore di sodio. Possiamo affermare che:

- 1) Lo spettroscopio misura una proprietà (la lunghezza d'onda) di un qualcosa (la radiazione) distinto da sé e, indirettamente, di un qualcosa (l'atomo di sodio) anch'esso distinto da sé.
- 2) È necessario conoscere la teoria dello spettroscopio (e, quindi, anche come eventuali interazioni tra lo spettroscopio e “l'ambiente” possano influenzare il funzionamento dello spettroscopio e, di conseguenza, il risultato della misura).

Nel caso degli orologi, viene a mancare la condizione 1). Infatti, gli orologi non misurano alcuna proprietà di un qualcosa distinto da sé: mostrano semplicemente le loro lancette o i loro numeri. Si tratta pertanto di capire come, per esempio, i “numeri” di un orologio siano “contati” e poi “mostrati”.

Gli orologi di uso comune si basano su un *fenomeno periodico che si svolge al loro interno*: in questo caso il “numero” mostrato dall'orologio è proporzionale al numero dei cicli conteggiati dall'orologio. Sarebbe opportuno che il funzionamento di un orologio non dipendesse dall'ambiente in cui esso è collocato: tuttavia, questa condizione è irrealizzabile. Pertanto, come nel caso di ogni altro strumento, dobbiamo conoscere la “teoria” dell'orologio che stiamo usando ed essere quindi in grado di predire eventuali effetti dell'ambiente sul suo funzionamento.

Nella vita quotidiana e nella pratica scientifica gli orologi sono usati per assegnare ad un evento un valore della variabile tempo e per misurare la durata di fenomeni che si svolgano nello stesso punto dello spazio (naturalmente, la dizione “stesso punto dello spazio” va intesa con una certa approssimazione) ⁽²⁾. Entrambe queste operazioni

⁽¹⁾ Tratteremo più avanti il caso dello spazio-tempo in cui la variabile “tempo” è inglobata in una coordinata di uno spazio a quattro dimensioni.

⁽²⁾ Nella vita quotidiana e nella pratica scientifica “evento” è qualcosa che accade ad un certo istante in un certo punto dello spazio. Discuteremo più avanti della durata di fenomeni che si svolgono su intervalli spaziali non nulli.

richiedono l'uso del concetto di simultaneità locale di due eventi. Tale concetto non è definibile: fa parte del nostro processo di acculturazione. Per misurare la durata di un fenomeno che si svolge nello “stesso punto dello spazio” è necessario innanzitutto definire (o individuare) l'evento iniziale e l'evento finale del fenomeno e *leggere* i numeri che il nostro orologio mostra *simultaneamente* all'accadere dell'evento iniziale (t_i) e di quello finale (t_f) del fenomeno: la durata è allora data, per definizione, da $\Delta t = t_f - t_i$.

Dopo la formulazione della teoria della relatività ristretta è divenuto usuale contrapporre la concezione di spazio e di tempo di Newton a quella di Einstein in termini di contrapposizione tra “assoluto” e “relativo”. Nella fisica (e, in generale, nella scienza) sarebbe opportuno usare con parsimonia termini carichi di tante suggestioni (il fatto che Newton li abbia usati non giustifica il dilagare delle successive variazioni sul tema). In realtà, il passaggio da Newton ad Einstein è caratterizzato dalla comparsa di una velocità limite: è ben noto che al tendere di questa velocità limite all'infinito, le due descrizioni tendono a sovrapporsi (le equazioni “einsteiniane” tendono a quelle “newtoniane”). Questo passaggio è ben illustrato dai due metodi “elementari” che conducono alle trasformazioni di coordinate di Lorentz. Il primo è quello parzialmente usato da Einstein nel lavoro del 1905 [1], basato sull'ipotesi della “costanza della velocità della luce”. Il secondo si basa su un approccio formale al problema della trasformazione delle coordinate: una versione particolarmente semplice è quella di Carlo Cattaneo [2]. Entrambi i metodi usano un insieme comune di postulati:

- a) Omogeneità e isotropia dello spazio.
- b) Omogeneità del tempo.
- c) Un principio di invarianza cinematico ⁽³⁾.

Questo insieme di postulati è sufficiente per pervenire, seguendo Cattaneo, alle seguenti trasformazioni di coordinate ⁽⁴⁾, ⁽⁵⁾:

⁽³⁾ Questo principio è meno esteso di quello galileiano o di quello einsteiniano (che riguardano tutti i fenomeni fisici). Preferiamo la dizione “principio di invarianza” invece di “principio di relatività” per coerenza tra i “nomi” e “contenuti”. Come è noto, il principio di invarianza galileiano o einsteiniano può essere formulato nel modo seguente: “i fenomeni presentati da un sistema fisico sono, a parità di condizioni iniziali, gli stessi in ogni sistema di riferimento inerziale” (ai tempi di Galileo la fisica coincideva con la meccanica); o, equivalentemente: “le leggi della fisica assumono la stessa forma in ogni sistema di riferimento inerziale”.

⁽⁴⁾ Come usuale nelle trattazioni elementari si considerano due sistemi di riferimento *inerziali* K e K' i cui assi cartesiani ortogonali siano paralleli ed equiversi; si suppone inoltre che K' sia in moto con velocità costante V rispetto a K lungo la direzione positiva dell'asse x ; infine che, per $t = t' = 0$, le origini dei due sistemi di riferimento coincidano.

⁽⁵⁾ Il problema di dedurre le trasformazioni di Lorentz senza usare il postulato della costanza della velocità della luce è stato posto a partire dal 1910. Si veda, in proposito, la bibliografia citata nel lavoro di Cattaneo. Riferimenti bibliografici più aggiornati si trovano in [3]. A partire dagli anni sessanta del secolo scorso si è riaperto l'interesse su questo argomento: tuttavia, sovente, sono stati ignorati i lavori precedenti.

$$\begin{aligned}
 x' &= \frac{1}{\sqrt{1+V^2/\alpha}}(x-Vt), \\
 y' &= y, \\
 z' &= z, \\
 t' &= \frac{1}{\sqrt{1+V^2/\alpha}}\left(t+\frac{V}{\alpha}x\right),
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

dove V è la velocità relativa tra i due sistemi di riferimento e α un parametro diverso da zero. Nel corso della deduzione — prima cioè di pervenire alle (1) — si ricava la seguente equazione:

$$u'_x = \frac{u_x - V}{1 + u_x V/\alpha},
 \tag{2}$$

dove $u'_x = dx'/dt'$ e $u_x = dx/dt$ sono le componenti della velocità di un punto lungo l'asse $x' \equiv x$ valutate da K' e K , rispettivamente. Dalla (2) si deduce che $|\alpha|$ ha le dimensioni del quadrato di una velocità. Il caso di $\alpha > 0$ viene eliminato invocando il principio di causalità: se fosse $\alpha > 0$ sarebbero possibili situazioni in cui in uno dei due sistemi di riferimento un “segnale” arriva prima di essere partito. Se, invece, $\alpha < 0$, le (1) diventano, ponendo $\alpha = -\kappa^2$:

$$\begin{aligned}
 x' &= \frac{1}{\sqrt{1-V^2/\kappa^2}}(x-Vt), \\
 y' &= y, \\
 z' &= z, \\
 t' &= \frac{1}{\sqrt{1-V^2/\kappa^2}}\left(t-\frac{V}{\kappa^2}x\right)
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

e la regola di composizione delle velocità (2):

$$u'_x = \frac{u_x - V}{1 - u_x V/\kappa^2}.
 \tag{4}$$

Si noti che se $u_x = \kappa$, allora anche $u'_x = \kappa$: κ è una *velocità limite*. Ponendo $\kappa = c$, le (3) diventano le trasformazioni di Lorentz ⁽⁶⁾. Il risultato sorprendente di questa

⁽⁶⁾ Questa “posizione” è naturalmente basata sull'ipotesi che le equazioni di Maxwell siano corrette e, quindi, invarianti per trasformazioni di coordinate. → Teoria di Maxwell

derivazione è rappresentato dalla comparsa “spontanea” di una velocità limite: il valore di questa non è, ovviamente, definito; spetta “ai fisici” individuarlo.

Il procedimento “alla Einstein” si basa, oltre che sui postulati usati nel procedimento “alla Cattaneo”, sul postulato aggiuntivo secondo cui la velocità della luce nel vuoto è la stessa in ogni sistema di riferimento inerziale ⁽⁷⁾. Questo procedimento, usando esperimenti ideali in cui due osservatori si scambiano lampi di luce di durata idealmente nulla, permette, diversamente dal precedente, di ricavare le formule della “dilatazione del tempo” e della “contrazione delle lunghezze” (nonché una formula semplificata dell’effetto Doppler) senza necessità di conoscere le equazioni di trasformazione delle coordinate (che, peraltro si ricavano, in questo procedimento, usando le due formule richiamate). Come già osservato, Einstein non sviluppa sino in fondo questo metodo; esso è invece completamente sviluppato, per esempio, in [4] o in [5]. Come mostrato, per esempio in [4], si perviene innanzitutto alla relazione

$$(5) \quad \Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}},$$

che connette la durata $\Delta t'$ di un fenomeno che si svolge in un punto del sistema di riferimento K' (durata “propria”) a quella misurata nel sistema di riferimento K , in cui il fenomeno si svolge su un intervallo spaziale non nullo. La (5) è la formula della cosiddetta “dilatazione del tempo”. Successivamente, sulla base di una definizione operativa della lunghezza l di un’asta in moto lungo la direzione del moto relativo dei due sistemi di riferimento inerziali — sempre basata sullo scambio di lampi di luce di durata idealmente nulla — si ottiene che

$$(6) \quad l = l_0 \sqrt{1 - V^2/c^2},$$

dove l_0 è la lunghezza “propria” dell’asta (cioè la lunghezza misurata nel sistema di riferimento in cui essa è in quiete). La (6) è la formula della cosiddetta “contrazione delle lunghezze” [6]. Non sfuggirà al lettore il significato ambiguo dei termini “dilatazione del tempo” e “contrazione delle lunghezze”, termini che possono evocare, come di fatto è storicamente successo, suggestioni più o meno improprie. Per interpretare correttamente la (5) e la (6), è opportuno considerare due piattaforme di lunghezza propria l_0 in moto relativo di avvicinamento a velocità costante (fig. 1).

Si consideri la coppia di fenomeni:

- ◇ lo scorrimento della piattaforma OB dinanzi ad O' ; la sua durata, misurata da O' , è $(l_0/V)\sqrt{1 - V^2/c^2}$;
- ◇ lo scorrimento della piattaforma $O'B'$ dinanzi ad O ; la sua durata, misurata da O , è $(l_0/V)\sqrt{1 - V^2/c^2}$.

⁽⁷⁾ Questo postulato svolge, nel procedimento “alla Einstein” il ruolo svolto nel procedimento “alla Cattaneo” dal postulato secondo cui t' è una funzione di (x, y, z, t) .

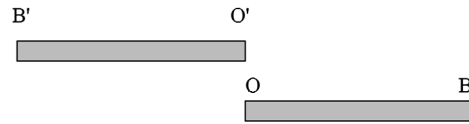


Fig. 1. — Le due piattaforme OB e $O'B'$ hanno la stessa lunghezza propria l_0 e sono in moto relativo rettilineo uniforme di avvicinamento con velocità V . Gli orologi O e B sono sincronizzati tra loro e così pure O' e B' . Nessuna sincronizzazione è richiesta tra gli orologi delle due piattaforme.

Questi due fenomeni corrispondono allo *stesso esperimento* eseguito da O' ed O , rispettivamente. In accordo con il principio di invarianza, le due durate sono uguali.

Si consideri poi la coppia di fenomeni:

- ♡ il viaggio di O da O' a B' ; la sua durata, misurata da $(O'$ e $B')$, è l_0/V ;
- ♡ il viaggio di O' da O a B ; la sua durata, misurata da $(O$ e $B)$, è l_0/V .

Anche questi due fenomeni corrispondono allo *stesso esperimento* eseguito da $(O'$ e $B')$ e da $(O$ e $B)$, rispettivamente. In accordo con il principio di invarianza, le due durate sono uguali.

I due fenomeni della coppia indicata dal simbolo ($\diamond$) possono dirsi *equivalenti* perché relativi allo stesso esperimento effettuato sull'una e sull'altra piattaforma. La medesima osservazione vale per la coppia di fenomeni indicata dal simbolo ($\heartsuit$).

Si consideri infine la coppia di fenomeni:

- $\diamond$ lo scorrimento della piattaforma OB dinanzi ad O' ; la sua durata, misurata da O' , è $(l_0/V)\sqrt{1 - V^2/c^2}$;
- ♡ il viaggio di O' da O a B ; la sua durata, misurata da $(O$ e $B)$, è l_0/V .

I due fenomeni considerati coincidono perché hanno in comune l'evento iniziale “ O' incontra O ” e l'evento finale “ O' incontra B ”. Tuttavia, essi corrispondono a due esperimenti diversi svolti, rispettivamente da O' e da $(O$ e $B)$. Il risultato delle misure dipende dal fatto che in un caso ($\diamond$) il fenomeno si svolge nel medesimo punto dello spazio, mentre nell'altro ($\heartsuit$) il fenomeno si sviluppa su un intervallo spaziale non nullo: operativamente questa differenza si traduce nell'uso di un solo orologio ($\diamond$) o di due orologi tra loro sincronizzati e collocati in punti diversi ($\heartsuit$) per misurare la durata del fenomeno. Naturalmente, le stesse considerazioni si applicano alla coppia di fenomeni:

- $\diamond$ lo scorrimento della piattaforma $O'B'$ dinanzi ad O ; la sua durata, misurata da O , è $(l_0/V)\sqrt{1 - V^2/c^2}$;
- ♡ il viaggio di O da O' a B' ; la sua durata, misurata da $(O'$ e $B')$, è l_0/V .

Le riflessioni svolte sulle quattro coppie di fenomeni mostrano come non abbia senso alcuno affermare che “gli orologi in moto rettilineo uniforme rallentano”: d'altra parte, questa asserzione è incompatibile con il principio di invarianza.

Nella trattazione di questi argomenti basata sul formalismo spazio-temporale di Minkowski la variabile “tempo” è inglobata nella quarta coordinata ct dello spazio-tempo. Siccome in questa trattazione il coefficiente della metrica spazio-temporale associato alla coordinata ct è uguale a ± 1 (a seconda di come si scrive il quadrato dell'intervallo tra due punti dello spazio-tempo), la durata propria di un fenomeno è ancora misurata con un orologio idealmente insensibile all'ambiente in cui è collocato.

A partire dalla nascita della teoria della relatività ristretta, è stato posto il problema di una possibile verifica sperimentale della formula della “dilatazione del tempo” ⁽⁸⁾. Nel 1907, Einstein, richiamando un lavoro sperimentale di Johannes Stark sull’effetto Doppler, suggerì una possibile verifica sperimentale della (5) basata sulla misura della frequenza della luce emessa da un atomo in moto [8]. La proposta di Einstein era basata sull’idea che l’atomo fosse un orologio: idea a sua volta suggerita dall’ipotesi che le righe emesse da un atomo fossero prodotte dall’oscillazione armonica di cariche elettriche ⁽⁹⁾. Lo sviluppo della meccanica quantica ha mostrato che l’idea che l’atomo — in quanto sede di un moto periodico — sia un orologio, non è sostenibile.

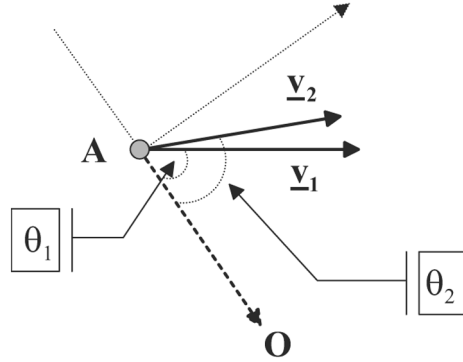


Fig. 2. – Emissione di un quanto di luce da parte di un atomo A. Il quanto di luce è emesso lungo la direzione $A \rightarrow O$: O rappresenta la fenditura d’ingresso dello spettroscopio. Si veda il testo.

Nel 1922, Erwin Schrödinger pubblicò un lavoro in cui l’emissione di un quanto di luce (dotato di energia $h\nu$ e quantità di moto $h\nu/c$) da parte di un atomo in moto rispetto all’apparato di misura (spettroscopio) era trattata come un problema di dinamica relativistica, applicando i principi di conservazione dell’energia e della quantità di moto [9]. Sviluppando integralmente la trattazione di Schrödinger si perviene alla relazione (si veda la fig. 2)

$$(7) \quad \nu = \nu_0 \frac{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}}{1 - (v_1/c) \cos \theta_1}$$

con

$$(8) \quad \nu_0 = \frac{\Delta E}{h} \left(1 - \frac{\Delta E}{2E_1} \right).$$

ν è la frequenza misurata dallo spettroscopio; $\vec{v}_1$ la velocità dell’atomo prima dell’emissione; θ_1 l’angolo formato da $\vec{v}_1$ con la direzione di emissione del quanto di luce; ν_0 la frequenza misurata dallo spettroscopio se l’atomo è in quiete prima dell’emissione;

⁽⁸⁾ Per una trattazione di questi temi si può vedere [7], nonché i numerosi lavori ivi citati.

⁽⁹⁾ In questo modello di emissione, interamente classico, la frequenza della radiazione emessa coincide con quella di oscillazione della carica elettrica in moto armonico.

ΔE la differenza tra l'energia iniziale e finale dell'elettrone che compie la transizione; E_1 , infine, è l'energia a riposo dell'atomo prima dell'emissione ⁽¹⁰⁾, ⁽¹¹⁾. Si osservi come, in base alla (8), l'energia del quanto di luce misurata dallo spettroscopio quando l'atomo emittente è in quiete prima dell'emissione non sia uguale a ΔE , ma sia ridotta del termine $\Delta E^2/2E_1$ che rappresenta l'energia di rinculo dell'atomo ⁽¹²⁾, ⁽¹³⁾.

Nel 1938 Ives e Stilwell, eseguendo l'esperimento suggerito nel 1907 da Einstein con atomi di idrogeno in volo, furono in grado di osservare sperimentalmente il termine dell'ordine di v^2/c^2 contenuto nella formula dell'effetto Doppler. Ives era un accanito anti-relativista: pertanto cercò di interpretare il risultato sperimentale ottenuto sulla base di una complicata teoria dell'etere [15] ⁽¹⁴⁾. Tuttavia, anche in questa teoria (secondo la quale il periodo fondamentale di un orologio in moto aumenta e regoli in moto si contraggono, cioè orologi e regoli sono fisicamente modificati dal moto rispetto all'etere), il risultato fu considerato — come nel lavoro di Einstein del 1907 — una verifica della “dilatazione del tempo”. Alla luce della trattazione di Schrödinger, dobbiamo invece concludere che l'esperimento di Ives e Stilwell co-

⁽¹⁰⁾ Il lavoro di Schrödinger è fondamentale per due motivi: usando, per la prima volta congiuntamente, l'energia $h\nu$ e la quantità di moto $h\nu/c$ del quanto di luce, ottiene la formula dell'effetto Doppler sulla base di una descrizione corpuscolare della luce (il fatto che le formule siano espresse in termini di frequenze non deve trarre in inganno); nella formula (7), la frequenza ν_0 ha significato operativo diverso da quello assunto nella “medesima” formula derivata mediante una descrizione ondulatoria della luce (si veda qualche riga più sotto). Si noti che le equazioni di conservazione scritte da Schrödinger sono dello stesso tipo di quelle che, poco dopo, verranno scritte da Compton e Debye per spiegare il cosiddetto effetto Compton (né Compton né Debye citano Schrödinger). Schrödinger non perviene alla (7), ma si ferma ad una equazione intermedia che contiene le velocità dell'atomo prima e dopo l'emissione del quanto di luce. La trattazione completa “alla Schrödinger” si trova in [10]. Ricordiamo infine che la più semplice derivazione “ondulatoria” dell'effetto Doppler per la radiazione elettromagnetica si basa sull'uso del quadrivettore d'onda $(\omega/c, k_x, k_y, k_z)$ e sulle equazioni di trasformazione delle sue componenti nel passaggio da un sistema di riferimento inerziale ad un altro. Si veda, per esempio, [11]. Si ottiene così la (7) in cui, però, ν_0 è la frequenza dell'onda misurata nel sistema di riferimento K' e ν quella misurata nel sistema di riferimento K (K e K' sono i due sistemi di riferimento descritti nella nota ⁽⁴⁾); v_1 è la velocità di K' rispetto a K ; θ_1 , infine, è l'angolo formato dalla direzione di propagazione dell'onda rispetto all'asse x del sistema di riferimento K . Come si vede, nella trattazione ondulatoria la sorgente (e il suo stato fisico) non svolge alcun ruolo.

⁽¹¹⁾ Se E_2 è l'energia a riposo dell'atomo dopo l'emissione, si ha $\Delta E = E_1 - E_2$.

⁽¹²⁾ Sebbene la (7) e la (8) siano oggi di ampio uso, la loro origine è stata dimenticata (si vedano, per esempio, [12] e [13]). D'altra parte, il lavoro di Schrödinger è stato ignorato anche dai suoi contemporanei, probabilmente perché l'ipotesi dei quanti di luce non era ancora stata accolta dalla comunità dei fisici. Peraltro, un anno prima della pubblicazione dell'articolo di Schrödinger, Einstein aveva pubblicato un lavoro in cui proponeva un esperimento teso a discriminare tra la descrizione ondulatoria e corpuscolare della luce [14]. L'aspetto singolare di questo lavoro è costituito dall'ipotesi secondo cui, da un punto di vista corpuscolare, la frequenza della radiazione emessa da un atomo in volo è identica a quella emessa dall'atomo in quiete. Appare evidente come, intorno al 1920, l'applicazione dell'ipotesi dei quanti di luce presentasse difficoltà di un certo rilievo.

⁽¹³⁾ La formula (7) si applica anche per il processo di assorbimento: in questo caso, nella (8) compare un (+) invece di un (−).

⁽¹⁴⁾ I lavori di Ives su questi argomenti sono stati raccolti in un volume [16]. R. C. Jones, interpretò subito dopo i risultati di Ives e Stilwell all'interno del quadro concettuale della relatività ristretta [17].

stituisce una corroborazione di una predizione della dinamica relativistica ⁽¹⁵⁾: esso rappresenta comunque la prima verifica sperimentale diretta di una predizione della relatività ristretta.

Qualche anno dopo, Bruno Rossi e David Hall eseguendo misure di decadimento dei muoni negativi (allora chiamati mesotroni) dei raggi cosmici ottennero una verifica sperimentale indiretta della (5): la verifica era indiretta perché basata sull'uso di un'altra formula relativistica riguardante la diminuzione della quantità di moto dei muoni dovuta alle collisioni con le molecole dell'atmosfera [20] ⁽¹⁶⁾. A partire dagli anni cinquanta del secolo scorso, comparvero molti lavori riguardanti il decadimento di particelle in moto rettilineo uniforme prodotte in acceleratori. Tuttavia, il loro scopo non era quello di studiare il comportamento relativistico delle particelle: tale comportamento era considerato come acquisito ed usato per descrivere i dati sperimentali o, talvolta, come risultato marginale dell'esperimento. Una rassegna dei dati ottenuti in questi lavori si può trovare in Baley *et al.* [21]. In questi esperimenti, come in quello di Rossi e Hall, la vita media delle particelle in moto è misurata indirettamente attraverso la misura della loro velocità e della distanza media da loro percorsa: la differenza, essenziale ai fini della precisione della misura, consiste nel passaggio da misure in atmosfera a quelle in vuoto. Il citato lavoro di Bailey *et al.* è interessante perché studia il decadimento di muoni negativi o positivi in moto circolare uniforme: il risultato è identico a quello che si sarebbe ottenuto se i muoni fossero stati in moto rettilineo uniforme. Pertanto, gli autori concludono che l'accelerazione cui i muoni sono sottoposti ($\approx 10^{18} g$) non influisce sulla vita media dei muoni ⁽¹⁷⁾, ⁽¹⁸⁾.

Come osservato all'inizio, idealmente, il funzionamento di un orologio non dovrebbe essere influenzato dall'ambiente in cui è collocato. Ovviamente, questa richiesta ideale non può essere soddisfatta. Si tratta quindi di controllare i parametri da cui può dipendere il funzionamento di un orologio.

Particolarmente interessante per le sue implicazioni concettuali è il funzionamento di un orologio atomico. Negli orologi atomici al cesio, gli atomi di ^{133}Cs assorbono le onde elettromagnetiche (microonde) prodotte da uno strumento pilotato in frequenza da un oscillatore al quarzo "bloccato" in frequenza — mediante un circuito di retroazione — dal segnale dovuto all'assorbimento delle microonde da parte degli

⁽¹⁵⁾ L'esperimento, indipendentemente condotto anche da Otting un anno dopo [18], fu ripetuto, con maggiore precisione, nel 1962 da Mandelberg e Witten [19].

⁽¹⁶⁾ La precisione della misura era tale da indurre gli autori ad affermare: "Mentre una verifica quantitativa della (5) ancora manca, la sua validità approssimata può essere considerata come stabilita."

⁽¹⁷⁾ E, quindi, per il principio di equivalenza debole (si veda più avanti), la vita media dei muoni non dipende dal campo gravitazionale. La precisione della misura è dell'ordine di una parte su mille.

⁽¹⁸⁾ È interessante riprendere in considerazione l'esperimento ideale delle due piattaforme discusso in precedenza. Se O' sta misurando la vita media di muoni in quiete, O e B vedono scorrere i muoni da O verso B . Se quando O' e O si incontrano, il numero dei muoni è N_0 , il loro numero sarà $N_0 e^{-(l_0 \sqrt{1-V^2/c^2})/(V\tau_0)}$ quando O' incontra B , sia per O' che per B : anche in questo esperimento c'è una grandezza — il numero dei muoni "sopravvissuti" in un punto dello spazio — che assume lo stesso valore nei due sistemi di riferimento. Naturalmente, analoghe conclusioni valgono se è O a misurare la vita media dei muoni in quiete ed O' e B' vedono scorrere i muoni da O' a B' .

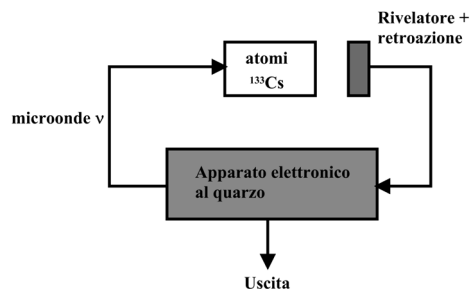


Fig. 3. – Schema di un orologio atomico al cesio.

atomi di cesio (fig. 3) ⁽¹⁹⁾. L’orologio è detto “atomico” perché sono gli atomi di cesio a “bloccarne” la frequenza di funzionamento; la frequenza misurata è una frequenza “elettrica”, proporzionale a quella delle microonde ⁽²⁰⁾. Per comprendere come “l’ambiente” possa influire sul funzionamento di un orologio atomico è necessario prendere in considerazione alcuni risultati sperimentali e la connessa descrizione teorica.

Nel 1960, Pound e Rebka verificarono sperimentalmente che l’energia dei fotoni emessi o assorbiti da nuclei dipende dal potenziale gravitazionale cui i nuclei sono sottoposti secondo l’equazione [25]

$$(9) \quad E(R+h) \approx E(R) \left(1 + \frac{gh}{c^2} \right),$$

dove R è il raggio della Terra, g l’accelerazione di gravità e h la distanza verticale dal suolo ($h \ll R$). Queste misure furono rese possibili dalla scoperta, avvenuta

⁽¹⁹⁾ Il cesio è, a temperatura ambiente, un solido dall’aspetto argenteo; si ossida molto facilmente e fonde a 28,44°C. La transizione coinvolta è quella tra i due livelli iperfini dell’elettrone di valenza del cesio. Il “rivelatore” è, in realtà, costituito da un sofisticato apparato che permette di separare gli atomi di cesio che hanno assorbito un fotone da quelli che non lo hanno assorbito. Per una rassegna sugli orologi atomici si veda, per esempio, [22]: gli orologi al cesio ne costituiscono solo una classe. Gli orologi atomici “scandiscono il nostro tempo” e fanno parte integrante del sistema di determinazione della posizione sulla Terra denominato GPS (*Global Positioning System*). In rete si trovano molte pagine (in inglese) su entrambi gli argomenti. Si vedano, per esempio [23] (orologi) e [24] (GPS e relatività).

⁽²⁰⁾ Come è noto, attualmente il secondo è definito come “la durata di 9192631770 periodi della radiazione corrispondente alla transizione tra i due livelli iperfini dello stato fondamentale dell’atomo di ^{133}Cs ”. Come vedremo più avanti, l’energia necessaria per la transizione tra questi due livelli sulla Terra dipende dal potenziale gravitazionale effettivo (includente quello dovuto all’accelerazione centripeta) nel punto in cui è collocato l’atomo di cesio (o l’orologio atomico) a riposo. Pertanto, la definizione precedente deve essere completata dalla dizione: “all’equatore ed a livello del mare”, oppure dalla dizione “in un punto qualunque del *geoide* definito come la superficie equipotenziiale includente anche il potenziale dell’accelerazione centripeta dovuta alla rotazione della Terra intorno al proprio asse”. I punti dell’equatore a livello del mare appartengono al *geoide*. Si noti come la dizione “a livello del mare” sia imprecisa: pertanto, è necessario costruire un “modello” del *geoide* inserendo nell’equazione che fornisce il potenziale gravitazionale effettivo il raggio della Terra all’equatore.

nel 1957, dell'effetto Mössbauer ⁽²¹⁾. Negli anni successivi, diversi sperimentatori mostrarono che un effetto analogo può essere ottenuto con nuclei sottoposti ad un campo di accelerazione prodotto da un dispositivo rotante [29]. Collocando la sorgente e l'assorbitore (costituiti dallo stesso tipo di nuclei) a distanze diverse (R_s e R_a) dall'asse di rotazione, i risultati sperimentali sono descritti dall'equazione

$$(10) \quad \frac{E_a - E_s}{E_s} \approx \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{c^2} (R_s^2 - R_a^2),$$

dove E_s è l'energia del fotone emesso dalla sorgente; E_a l'energia del fotone assorbito dall'assorbitore ed ω la velocità angolare del rotore. La (9) e la (10) possono essere fuse in un'unica equazione

$$(11) \quad \frac{E_1 - E_2}{E_2} \approx \frac{\phi_1 - \phi_2}{c^2},$$

dove ϕ è il potenziale gravitazionale $-GM/R$ nel caso della (9), o quello dovuto all'accelerazione $-(1/2)\omega^2 R^2$, nel caso della (10). Come è noto, nella teoria della relatività generale, un campo di accelerazione è localmente indistinguibile da un campo gravitazionale (principio di equivalenza debole) ⁽²²⁾. Si perviene alla (11) partendo dall'equazione che fornisce l'energia a riposo di una particella di massa M posta in un campo gravitazionale (o di accelerazione) debole e costante, il cui potenziale sia ϕ [31]

$$(12) \quad E = Mc^2 \sqrt{1 + \frac{2\phi}{c^2}}.$$

Questa equazione, per una particella di massa m eccitata si scrive

$$(13) \quad E = (mc^2 + \Delta E_\infty) \sqrt{1 + \frac{2\phi}{c^2}},$$

⁽²¹⁾ L'effetto Mössbauer può essere descritto nel modo seguente. Nuclei radioattivi appartenenti ad un cristallo emettono una frazione dei fotoni gamma, relativi ad una determinata transizione tra due livelli nucleari, senza rinculo: è come se, nella (8), l'energia a riposo del nucleo venisse sostituita da quella dell'intero cristallo. In rete si trovano molte pagine (in inglese) sull'argomento. In particolare, si può consultare la *Nobel Lecture* di Mössbauer [26]. Nell'esperimento di Pound e Rebka il dislivello h era di 22,55 m; per questo valore di h , il termine gh/c^2 risulta uguale a $2,46 \times 10^{-15}$. I fotoni γ emessi (senza rinculo) dai nuclei al suolo non possono essere assorbiti dai nuclei posti all'altezza h , perché l'energia necessaria per il loro assorbimento è maggiore di quella da essi posseduta (secondo la (9)). Pertanto, l'assorbimento diventa possibile solo se il cristallo che contiene i nuclei "assorbitori" è posto in moto verso la sorgente con velocità v tale che $v/c = gh/c^2$, compensando così per effetto Doppler del primo ordine l'energia mancante. Per migliorare la sensibilità della misura, il cristallo contenente i nuclei assorbitori è posto in moto armonico e la condizione di risonanza è rivelata con amplificatori a sensibilità di fase. Siccome c'è un effetto dipendente dalla temperatura del cristallo, è necessario ridurre al minimo (e controllare) la differenza di temperatura tra sorgente e rivelatore. Misure più accurate furono svolte da Pound e Snider qualche anno dopo [27]. Il fenomeno studiato da questi autori, previsto dalla relatività generale, è noto sotto il nome di *red-shift* gravitazionale (l'aggettivo *red* è convenzionale, perché l'effetto può realizzarsi anche come un *blue-shift*). Se i campi gravitazionali sono deboli, la formula della relatività generale approssimata (per campi deboli) può essere ricavata partendo dalla formula della relatività ristretta che fornisce l'energia del sistema *Terra+atomo* in quiete. Si veda, per esempio, [28].

⁽²²⁾ Le verifiche sperimentali delle predizioni della relatività generale sono discusse, per esempio, in [30].

dove m è la massa della particella nello stato fondamentale e ΔE_∞ è la differenza di energia tra lo stato eccitato e lo stato fondamentale in assenza di campo gravitazionale. Quindi l'energia del fotone emesso (o assorbito) *in assenza di rinculo* dalla particella sarà

$$(14) \quad E_f = \Delta E_\infty \sqrt{1 + \frac{2\phi}{c^2}}$$

da cui si perviene — nell'approssimazione in cui $\phi \ll c^2$ — alle (11), (9) e (10) ⁽²³⁾.

Nel caso di un orologio atomico al cesio, l'energia necessaria per far compiere agli atomi la transizione voluta dipende dal potenziale gravitazionale (o di accelerazione) come indicato dalla (14): di conseguenza, per mantenere la condizione di risonanza degli atomi di cesio, la frequenza delle microonde deve essere tale da soddisfare la (14).

Di solito, questi argomenti sono trattati usando direttamente il formalismo spazio-temporale della relatività generale — da cui peraltro discende la (14). La durata di un fenomeno che si svolge in un punto P dello spazio dipende dal valore del coefficiente g_{00} della metrica associato alla coordinata temporale nel punto P . Siccome un orologio posto in P non misura alcuna proprietà di alcunché distinto da sé, ne segue che si deve individuare il sistema fisico contenuto nell'orologio caratterizzato da una grandezza fisica sensibile al coefficiente g_{00} della metrica. Negli orologi atomici al cesio questa grandezza fisica è, come abbiamo visto, l'energia necessaria per la transizione iperfine degli elettroni di valenza degli atomi di cesio e la relativa equazione è la (14) ⁽²⁴⁾. Pertanto, la frequenza delle microonde necessaria per mantenere in risonanza gli atomi di cesio e, di conseguenza, la frequenza in uscita dall'orologio al cesio, dipende dal potenziale gravitazionale effettivo secondo la (14) (in cui ogni membro è diviso per la costante di Planck h). (g.g.)

Bibliografia

- [1] EINSTEIN A., “L'elettrodinamica dei corpi in movimento” (1905) (versione italiana) in rete alla pagina <http://matsci.unipv.it/persons/antoci/re/Einstein05.pdf> La versione originale (*Ann. Phys. (Leipzig)* **17** (1905) 891-921) si trova in rete alla pagina <http://www.physik.uni-augsburg.de/annalen/history/Einstein-in-AdP.htm>.
- [2] a) CATTANEO C., “Sui postulati comuni alla cinematica classica e alla cinematica relativistica”, *Rend. Acc. Lincei* **24** (1958) 527-532 in rete alla pagina <http://fisicavolta.unipv.it/percorsi/pdf/cattaneo.pdf>; una rielaborazione “didattica” della trattazione di Cattaneo si può trovare in: b) GIULIANI G. e BONIZZONI I., *Lineamenti di elettromagnetismo* (La Goliardica Pavese, Pavia) 2004, pp. 80-89.
- [3] Si veda alla pagina: http://www.phys.spbu.ru/Deanery/Archive/1999_SN/lorfoc/lit.htm.
- [4] Rif. [2] b) pp. 29 - 42.
- [5] UGAROV V.A., *Teoria della relatività ristretta* (Edizioni Mir) 1982, pp. 97-108.

⁽²³⁾ Si noti che, alla luce delle argomentazioni appena sviluppate, si deve porre nella (8) $\Delta E = \Delta E_\infty \sqrt{1 + 2\phi/c^2}$.

⁽²⁴⁾ Nel caso di un campo gravitazionale prodotto da una massa a simmetria sferica il coefficiente g_{00} risulta uguale a $1 + 2\phi/c^2$ (ϕ potenziale gravitazionale); nel caso di un disco rotante si ha invece, nel sistema di riferimento rotante con il disco, $g_{00} = 1 - \omega^2 r^2/c^2 = 1 + 2\phi/c^2$ (ϕ potenziale dovuto all'accelerazione centripeta). Per una trattazione di questi argomenti si veda, per esempio, [32].

- [6] Rif. [2] b) pp. 36-39; oppure, in rete alla pagina <http://fisicavolta.unipv.it/percorsi/pdf/contrazione.pdf>
- [7] BONIZZONI I. e GIULIANI G., "The interpretations by experimenters of experiments on 'time dilation': 1940-1970 circa"; in rete alla pagina <http://arxiv.org/abs/physics/0008012>
- [8] EINSTEIN A., "On the possibility of a new test of the relativity principle" in *"The Collected Papers of Albert Einstein"*, a cura di, KOX A.J., KLEIN MARTIN J. e SCHULMANN R., Vol. 2, The Swiss years: writings, 1900-1909, English translation (Princeton) 1989, pp. 232-233. La versione originale (*Ann. Phys. Leipzig* **22** (1907) 197-198) si trova in rete alla pagina <http://www.physik.uni-augsburg.de/annalen/history/Einstein-in-AdP.htm>.
- [9] SCHRÖDINGER E., "Dopplerprinzip und Bohrsche Frequenzbedingung", *Phys. Z.* **23** (1922) 301-303. Traduzione italiana alla pagina <http://matsci.unipv.it/persons/antoci/Schroedinger22.pdf>
- [10] Rif. [2] b) pp. 194-200.
- [11] Rif. [2] b) pp. 189-191.
- [12] MØLLER C., *The Theory of Relativity*, second edition (Oxford) 1972 pp. 401-407.
- [13] FRENCH A.P., *Special Relativity* (London) 1968, pp. 197-199.
- [14] EINSTEIN A., "Ein den Elementarprozess der Lichtemission betreffendes Experiment", *Preuss. Akad. Wiss., Sitz.*, **51** (1921) 882. Traduzione italiana in rete alla pagina <http://fisicavolta.unipv.it/percorsi/pdf/Einstein21.pdf>
- [15] IVES H. E. e STILWELL G. R., "An Experimental Study of the Rate of a Moving Atomic Clock", *J. Op. Soc. Am.* **28** (1938) 215-226.
- [16] HAZALET R. e TURNER D. (Curatori), *Einstein Myth and Ives Papers - A Counterrevolution in Physics* (Old Greenwich) 1979.
- [17] JONES R. C., "On the Relativistic Doppler Effect", *J. Op. Soc. Am.* **29** (1939) 337-339.
- [18] OTTING G., "Der quadratische Dopplereffekt", *Phys. Z.* **40** (1939) 681-687.
- [19] MANDELBERG H. I. e WITTEN L., "Experimental Verification of the Relativistic Doppler Effect" *J. Op. Soc. Am.* **52** (1962) 529-536.
- [20] ROSSI B. e HALL D. B., "Variation of the Rate of Decay of Mesotron with Momentum" *Phys. Rev.* **59** (1941) 223-228.
- [21] BAILEY J. *et al.*, "Measurements of Relativistic Time dilation for Positive and Negative Muons in a Circular Orbit", *Nature* **268** (1977) 301-305.
- [22] AUDOIN C. e GUINOT B., *The Measurement of Time* (Cambridge University Press) 2001.
- [23] Alla pagina: http://inms-ienm.nrc-cnrc.gc.ca/en/research/cesium_clock.e.php.
- [24] ASHBY N., "Relativistic Effects in the Global Positioning System" alla pagina: <http://www.livingreviews.org/Articles/Volume6/2003-1ashby>.
- [25] POUND R. V. e REBKA G. A. jr., "Apparent weight of photons", *Phys. Rev. Lett.* **4** (1960) 337-341.
- [26] R. Mössbauer, Nobel Lecture (1961) in rete alla pagina: <http://nobelprize.org/physics/laureates/1961/mossbauer-lecture.pdf>.
- [27] POUND R. V. e SNIDER J. L., "Effect of Gravity on Gamma Radiation", *Phys. Rev.* **140** (1965) B788-B803.
- [28] Rif. [2] b), pp. 69-71.
- [29] Rif. [7], pp. 31-36, nonché i lavori originali ivi citati.
- [30] WILL C. M., "The Confrontation between General Relativity and Experiment", in rete all'indirizzo: <http://relativity.livingreviews.org/Articles/>. Questo articolo è periodicamente aggiornato dall'autore.
- [31] a) Rif. [12], p. 387; b) LANDAU L. e LIFCHITZ E., *Théorie du Champ* (Editions de la Paix, Moscou) pp. 338-343.
- [32] Rif. [31], b) pp. 377-385; pp. 346-347.